special methods, concerns himself with the determination of demand function, supply function, and the cobweb model they form. The duration of the cycle is a data, and the problem to be solved is how to eliminate time as the factor expressing most of the changes of demand and supply. Dummy variables are also used in order to eliminate some changes in the Yugoslav agricultural policy. The demand and supply functions that theoretically determine the action of the cobweb model are constructed on the basis of cleaned data. There are expected differences between the true real shiftings of the quantities and prices and the dynamic path resulting from the cobweb model determined by the demand and supply functions.

In order to evaluate reasons for such a disagreement between the theory and the statistical results, in the second part of the article, the author discusses the fulfilment of the theoretical conditions for the action of the cobweb model. The main problems concerned in this part are the problem of identification of the demand and supply functions, and the problem of changes in both functions that, due to a number of reasons, cannot be successfully removed from the data. Although the established shiftings are predominantly in consistence with the theoretical requirements, the main conclusion is that the action of the cobweb model cannot be empirically well determined because the »dynamic« model is based on the static demand and supply functions.

PREGLED NAUČNE OBLASTI

PROGRAMIRANJE SA RAZLOMLJENO LINEARNIM FUNKCIONALIMA

Ljubomir MARTIĆ)*

1. Uvod

Kad se izvjestan broj problema u dovoljnoj mjeri izuči i znanje o njima se donekle zaokruži, nastaje mogućnost a i potreba da se dostignuća pregledno izlože i sistematiziraju. Takav čas čini nam se, nastupio je za onu vrst nelinearnog programiranja koja bi se mogla nazvati razlomljeno linearnim programiranjem. Radi se, naime, o problemima optimizacije razlomljeno linearne funkcije (funkcionala) sa linearnim ograničenjima[1]).

Prva posebna studija o tim problemima pojavila se 1960. godine pod naslovom »Hiperboličko programiranje«. Njezin autor Bela Martos objasnio je da je uzeo taj naziv zato što razlomljeno linearna funkcija jedne varijable ima za graf hiperbolu. No, iz takvog naziva moglo bi se pomisliti i nešto drugo, naime da je funkcija cilja ili kriterija programa — hiperbolička funkcija (*shx* ili *chx*, recimo). U svakom slučaju naziv »hiperboličko programiranje« držimo da nije najsretnije izabran.

Prvi primjeri razlomljenog programiranja zabilježeni su u okviru teorije strategijskih igara u radu Isbella i Marlowa »Attrition Games«, publiciranog još 1956. godine. Isbell i Marlow svode optimiranje razlomljeno linearnog funkcionala na optimiranje niza različitih linearnih funkcionala. Linearni funkcional u svakom stadiju toga konvergentnog iterativnog procesa određen je optimizacijom funkcionala u prethodnom stadiju. U suštini na isti način pristupa problemu razlomljeno linearnog programiranja W. Dinkelbach i još neki autori. U trećem odjeljku prikazat ćemo Dinkelbachovu metodu kao najboljeg predstavnika toga pristupa rješavanju problema razlomljeno linearnog programiranja.

U četvrtom odjeljku obrađena je Martosova metoda, u stvari jedna modifikacija simpleks metode za linearne programe, koja koristi gradijent funkcije cilja. To nije jedina gradijentna metoda razrađena za ovaj slučaj ali je svakako najjednostavnija.

U petom odjeljku pokazat ćemo kako su A. Charnes i W. W. Cooper na izravan način zamijenili problem razlomljeno linearnog programiranja

*) Autor je profesor Ekonomskog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu.

1) Funkcional je drugi naziv za funkciju definiranu na vektorskom prostoru a sa vrijednostima u polju skalara (usp. S. Kurepa [20], str. 117).

za najviše dva problema linearnog programiranja koji se razlikuju jedan od drugoga samo u promjeni predznaka u funkcionalu i u jednom ograničenju. Njihova transformacija varijable je jednostavnija od transformacije što su je nešto ranije upotrebili M. Klein i C. Derman.

Iz naziva ostalih odjeljaka jasno je o čemu se u njima radi. Istaknimo samo da su u šestom odjeljku verificirana sva tri algoritma (Dinkelbachov, Martosev i Charnes-Cooperov) na jednom numeričkom primjeru, a usput je prikazana i jedna geometrijska metoda te data geometrijska interpretacija razmatranog ilustrativnog primjera.

2. Primarni i dualni problemi

Problem razlomljeno linearnog programiranja može se ovako formulirati:

$$\text{Max}\,\frac{C'X+c_0}{D'X+d_0} \tag{1}$$

$$AX\leq A_0 \tag{2}$$

$$X\geq 0 \tag{3}$$

gdje je

$$C=\begin{bmatrix} c_1\\ c_2\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ c_n\end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix} d_1\\ d_2\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ d_n\end{bmatrix}\quad\text{i}\quad X=\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ x_n\end{bmatrix}$$

dok je A matrica $[a_{ij}]$ reda (m, n), A_0 je m-dimenzionalni vektor a c_0 i d_0 su skalari.

Sa gledišta praktične primjene interesantan je ovaj slučaj:

(a) Skup mogućih rješenja $S=\{X\,|\,AX\leq A_0,\ X\geq 0\}$ je neprazan i ograničen (u smislu da je distanca između dvije proizvoljne tačke iz S manja od nekog unaprijed datog pozitivnog broja). Inače je S, kao što znamo, konveksno i zatvoreno (jer sadrži sve svoje granične tačke). Prema tome, S je konveksni poliedar, dakle ima konačan broj ekstremnih tačaka i svaka tačka od S je neka konveksna kombinacija ekstremnih tačaka.

(b) $D'X + d_0 > 0$ za svako $X\in S$. Prema tome, funkcija cilja je kontinuirana i, još više, njezin nazivnik je pozitivan.

U slučaju kad neki ekonomski problem dolazi u obliku (1) — (3), prvi uvjet znači da nijedna od ekonomskih aktivnosti koja ima da bude programirana ne može biti neograničena. Drugi uvjet isključuje mogućnost da vrijednost programa postane infinitna. Vidimo, dakle, da oba uvjeta odgovaraju praktičkim pretpostavkama. Što više, jedino ovaj slučaj ima praktički značaj.

Nazivnik $D'X + d_0$ može se interpretirati kao vrijednost ulaganja za ostvarenje programa X. U tom slučaju brojnik $C'X + c_0$ predstavlja ekonomski efekt toga ulaganja. Prema tome, problem se sastoji u tome da se nađe takav program proizvodnje X da omjer efekta i investicija bude, u datim uvjetima, što veći. Radi se, dakle, o problemu maksimizacije efikasnosti investicija. Ako je, na primjer, d_j lični dohodak po jedinici proizvoda x_j i c_j cijena te jedinice, tada je funkcija cilja pokazatelj produktivnosti rada.

Vratimo se opet na uvjet (b). Ako pretpostavimo da je razlomljena funkcija (1) neprekidna nad S, tj. da je $D'X + d_0 \neq 0$, dovoljno je još pretpostaviti da postoji bar jedna tačka X iz S u kojoj je nazivnik pozitivan, pa da taj nazivnik bude pozitivan za sve tačke od S. To slijedi, s jedne strane, iz kontinuiranosti nazivnika i, sa druge strane, iz konveksnosti područja njegove definicije. Naime, ne može nazivnik u dvije tačke od S imati različite predznake, jer bi u nekoj tački na njihovoj pravocrtnoj spojnici imao vrijednost 0, a to je protivno pretpostavci o neprekidnosti funkcije cilja. Kad bi nazivnik bio negativan, pomnožili bismo brojnik i nazivnik sa —1, pa bismo opet imali ispunjen uvjet (b). Prema tome, taj uvjet ne umanjuje općenitost razmatranja[2]).

U nekim primjenama maksimizira se ili minimizira kvocijent homogenih linearnih formi a uvjeti su dati u formi jednadžbi. Taj specijalni slučaj pojavljuje se u ovom obliku:

$$\text{Max}\,\frac{C'X}{D'X} \tag{4}$$

$$AX=A_0 \tag{5}$$

$$X\geq 0 \tag{6}$$

a može se notirati i ovako:

$$\text{Max}\,\frac{\sum\limits_{j=1}^{n} c_j x_j}{\sum\limits_{j=1}^{n} d_j x_j}.$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=a_{i0}\quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ m)$$

$$x_j\geq 0,\quad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

Ako problem (4) — (6) označimo kao primarni, postavlja se pitanje kako izgleda njegov dual. Odgovor na to pitanje dao je indijski matematičar Kanti Swarup [31]. Proširujući koncept dualiteta iz linearnog programiranja, Swarup je formulirao dual problema (4) — (6), kako slijedi:

$$\text{Min}\,\frac{A_0'U}{A_0'V} \tag{7}$$

$$A_0'V(A'U-C)-A_0'U(A'V-D)\geq 0 \tag{8}$$

$$A_0'V\geq 0 \tag{9}$$

(10) $A_0'U$ i $A_0'V$ nisu simultano jednaki nuli.

---

[2]) Iz ovoga smo rekli slijedi da bismo uvjet (b) mogli zamijeniti s ovim blažim uvjetom:

$$S\cap\{X\,|\,D'X+d_0=0\}\neq v, \tag{c}$$

gdje je v prazni skup. Skup S nema zajedničke tačke sa skupom nultačaka nazivnika! Drugim riječima, u skupu S ne nalazi se takav X koji poništava nazivnik. Iz konveksnosti skupa S slijedi da nazivnik funkcije cilja na skupu S ne mijenja predznak.

Dual se može notirati također i ovako:

$$\text{Min} \frac{\sum_{l=1}^{m} a_{lo} u_l}{\sum_{l=1}^{m} a_{lo} v_l}$$

$$\left(\sum_{l=1}^{m} a_{lo} v_l\right)\left(\sum_{l=1}^{m} a_{jl} u_l - c_j\right) - \left(\sum_{l=1}^{m} a_{lo} u_l\right)\left(\sum_{l=1}^{m} a_{jl} v_l - d_j\right) \geq 0$$

$$(j = 1, 2, \ldots, n)$$

$$\sum_{l=1}^{m} a_{lo} v_l \geqslant 0, \quad \text{ali}$$

$$\sum_{l=1}^{m} a_{lo} u_l \;\text{ i }\; \sum_{l=1}^{m} a_{lo} v_l \text{ nisu simultano jednaki } 0.$$

Primjećuje se da je dualni problem konstruiran do izvjesnog stupnja na sličan način kao dual problema linearnog programiranja. Maksimumu kvocijenta homogenih linearnih formi u primarnom problemu korespondira minimum takvog kvocijenta u dualnom problemu. Nema restrikcija na predznak dualnih varijabli u_l, v_l, budući da su uvjeti u primarnom problemu u formi jednadžbi. Vektor A_o iz uvjeta primarnog problema prešao je u funkciju cilja dualnog problema, dok su vektori koeficijenata C i D varijabli iz funkcije cilja primarnog prešli u uvjete dualnog problema. No, iako se zamjećuju i razlike. Na linearnu formu u nazivniku funkcije cilja u dualu postavlja se blaži uvjet od onoga što stoji na odgovarajuću linearnu formu u primarnom problemu. Zato je i bio potreban uvjet (10). Nadalje, broju m uvjeta primarnog problema odgovara dvostruko veći broj, tj. $2m$ dualnih varijabli. Najveća razlika je ipak u tome što dual ima nelinearna ograničenja (8).

K. Swarup je istraživao i veze između primarnog i dualnog problema i dokazao ova tri teorema:

1. Ako je X moguće rješenje primarnog i U, V moguće rješenje dualnog problema, tada je

$$\frac{C' X}{D' X} \leq \frac{A_o' U}{A_o' V}$$

2. Ako je $\widehat{X}$ moguće rješenje primarnog i $\widehat{U}$, $\widehat{V}$ moguće rješenje dualnog problema tako da je

$$\frac{C' \widehat{X}}{D' \widehat{X}} = \frac{A_o' \widehat{U}}{A_o' \widehat{V}}$$

tada su $\widehat{X}$ i $\widehat{U}$, $\widehat{V}$ optimalna rješenja.

3. Ako primarni problem ima optimalno rješenje, tada i dual ima optimalno rješenje i dva optimuma su jednaka, to jest

$$\text{Max} \frac{C' X}{D' X} = \text{Min} \frac{A_o' U}{A_o' V}$$

Analogne teoreme, kao što je poznato, imamo u linearnom programiranju. (Usporediti: Lj. Martić [21], str. 78—79).

Nadalje Swarup je pokazao kako se iz poznatog optimalnog rješenja primarnog problema konstruira optimalno rješenje duala. Neka je X_B optimalno bazično rješenje primarnog problema, gdje je B oznaka za bazu. Ako su C_B i D_B vektori koji sadrže koeficijente bazičnih varijabli u brojniku i nazivniku od (4), tada je

$$U' = C'_B\, B^{-1}, \quad V = D'_B\, B^{-1}$$

optimalno rješenje dualnog problema.

3. Metoda Dinkelbacha

W. Dinkelbach [8] razvija svoj način rješavanja problema (1) — (3), polazeći od toga da je, u datim uvjetima, svaki lokalni maksimum funkcije cilja ujedno i globalni maksimum.[3]) Iz pretpostavke da je skup mogućih rješenja S ograničen i zatvoren a funkcija cilja kontinuirana na S, zaključuje da maksimum egzistira. Sada mu je još preostalo da dokaže da funkcija cilja ima maksimum u bar jednoj ekstremnoj tački skupa S. Ovdje treba napomenuti da je B. Martos prije Dinkelbacha to učinio na sasvim drugačiji način.[4])

Problem se, dakle, svodi na to, da se odredi ekstremna tačka X_ν skupa S na kojoj je funkcija (1) maksimalna. Ako se funkcija (1) označi sa $z(X)$, njezina vrijednost na proizvoljnoj ekstremnoj tački X_ν je $z(X_\nu)$ ili kraće z_ν. Dinkelbach polazi od te vrijednosti kao čvrstog parametra i konstruira pomoćni problem, kako slijedi:

$$\text{(11)} \qquad \text{Min } L(X, z_\nu) = z_\nu (D' X + d_o) - (C' X + c_o) = (z_\nu D' - C') X + z_\nu d_o - c_o$$

$$\text{(12)} \qquad A X \leq A_o$$

$$\text{(13)} \qquad X \geq 0$$

Ako je $L(X_\nu, z_\nu) = 0$ minimum, tada je X_ν optimalno bazično rješenje problema razlomljeno linearnog programiranja (1) — (3). U protivnom slučaju ide se od ekstremne tačke X_ν, prema simpleks metodi, do tačke $X_{\nu+1}$ i odredi $z_{\nu+1} = z(X_{\nu+1})$. Tada je $z_{\nu+1} > z_\nu$, što se može lako dokazati (vidjeti [8], str. 144).

Proces rješavanja može se opisati na slijedeći način. Sastavi se simpleks tabela za pomoćni problem (11) — (13) i pođe se od neke ekstremne

---

3) Dva različita dokaza za tu tvrdnju dali su još B. Kreko [19] i K. Swarup [27].

4) Dinkelbachu je bio poznat taj Martosev rad. O tome svjedoči jedna komunikacija A. Charnesa i W. W. Coopera [6]. Oni navode da ih je W. Dinkelbach uputio na Martosev rad a C. van de Panne na Dinkelbachov. No, do tada (1963) nisu bili u prilici da imaju prijevod Martosevog rada sa mađarskog. Taj prijevod je, naime, publiciran tek 1964 (vidjeti: B. Martos [24] — u popisu literature).

tačke X_1, tj. od inicijalnog baznčnog rješenja. Koeficijenti varijabla u funkciji cilja L su komponente vektora $z_1 D' - C'$. Vrijednost parametra z_1 odredi se prema (1), tako da je $L(X_1, z_1) = 0$. Primijeni se algoritam simpleks metode za slučaj minimuma i dobije rješenje X_2. Očigledno je $L(X_2, z_1) < 0$. Iz $L(X_2, z_2) = 0$ ili iz (1) izračuna se z_2. Zamijene se koeficijenti u funkciji cilja sa komponentama vektora $z_2 D' - C'$. Opet se primijeni simpleks metoda pa se dođe do trećeg baznčnog rješenja X_3 itd. Tako se nastavi sve dok ne nastupi slučaj kad se L ne može više smanjivati i samim tim z se ne može više povećavati. To je znak da je optimalno rješenje dostignuto.

Sličnu parametarsku proceduru razvili su ranije J. R. Isbell i W. H. Marlow [11] a poslije Dinkelbacha mađarski matematičar János Stahl [26]. Svođenje problema razlomljeno linearnog programiranja na probleme parametarskog linearnog programiranja obrađivano je u knjizi E. G. Goljšteina i D. B. Judina [14] i u radu H. C. Jokscha [13].

4. Metoda Martosa

B. Martos [22] je prvi uočio da su ispunjeni svi preduvjeti da se problem (1) — (3) uz pretpostavke (a) i (b) riješi simpleks metodom. Svaki lokalni ili relativni maksimum od z je globalni maksimum. Skup mogućih rješenja S je konveksni poliedar a bar jedna od njegovih ekstremnih tačaka je optimalna. Kako doći do nje? Prema simpleks metodi polazi se od jednog baznčnog mogućeg rješenja. Uz pretpostavku nedegeneracije tom rješenju odgovara jedna ekstremna tačka skupa S. Od te tačke prelazi se na drugu ekstremnu tačku u kojoj je vrijednost funkcije z veća. Drugim riječima, od jednog baznčnog rješenja prelazi se na drugo, bolje rješenje. Kako? Izmijeni se jedan vektor u bazi. Za to treba imati kriterij za izbor novog vektora. Upravo taj kriterij je Martos razvio i ugradio u algoritam simpleks metode. U tome se i sastoji njegova modifikacija simpleks metode.

U nastavku ovoga odjeljka izložit ćemo u detalje Martosevu modificiranu simpleks metodu, dopunjujući je sa nekim novijim rezultatima.

Pretpostavimo da su ograničenja već dovedena u formu jednadžbi, to jest da je $AX = A_0$. Uzmimo nadalje da imamo jedno početno baznčno rješenje i da je to rješenje nedegenerirano. Neka je u prvoj bazi prvih m vektora A_i, $(i = 1, 2, \ldots, m)$. Svaki od preostalih vektora A_j, $(j = m + 1, \ldots, n)$ izrazit ćemo pomoću baznčnih vektora ovako:

$$A_j = \sum_{i=1}^{m} l_{ij} A_i$$

$$A_0 = \sum_{i=1}^{m} l_{i0} A_i$$

Sada ćemo definirati slijedeće veličine:

$$z_j^1 = \sum_{i=1}^{m} c_i l_{ij}, \qquad z^1 = \sum_{i=1}^{m} c_i l_{i0} + c_0$$

$$z_j^2 = \sum_{i=1}^{m} d_i l_{ij}, \qquad z^2 = \sum_{i=1}^{m} d_i l_{i0} + d_0$$

Vidimo da je z^1/z^2 vrijednost funkcije cilja z za prvo baznčno rječenje $X_B = [l_{10}, l_{20}, \ldots, l_{m0}, 0, 0, \ldots, 0]'$.

Zatim ćemo definirati veličinu Δ_j, kako slijedi:

$$\Delta_j = z^1 (z_j^2 - d_j) - z^2 (z_j^1 - c_j)$$

Sve te veličine razmjestit ćemo u simpleks tabelu koja je sasvim slična onoj iz linearnog programiranja.

c_i:			c_0	c_1	c_2	...	c_m	c_{m+1}	...	c_s	...	c_n
	d_i:		d_0	d_1	d_2	...	d_m	d_{m+1}	...	d_s	...	d_n
		Baza	A_0	A_1	A_2	...	A_m	A_{m+1}	...	A_s	...	A_n
c_1	d_1	A_1	l_{10}	1	0	...	0	$l_{1,m+1}$	...	l_{1s}	...	l_{1n}
c_2	d_2	A_2	l_{20}	0	1	...	0	$l_{2,m+1}$	...	l_{2s}	...	l_{2n}
.	.	.	.	.	.		.			.		.
c_m	d_m	A_m	l_{m0}	0	0	..	1	$l_{m,m+1}$	...	l_{ms}	...	l_{mn}
		$z_j^1 - c_j$	z^1	0	0	...	0	$z_{m+1}^1 - c_{m+1}$	...	$z_s^1 - c_s$	...	$z_n^1 - c_n$
		$z_j^2 - d_j$	z^2	0	0	...	0	$z_{m+1}^2 - d_{m+1}$	...	$z_s^2 - d_s$	...	$z_n^2 - d_n$
		Δ_j	z^1/z^2	0	0	...	0	Δ_{m+1}	.	Δ_s	...	Δ_n

Uzmimo sada u razmatranje stupac s i uočimo u njemu pozitivne elemente $l_{is} > 0$. Podijelimo svaki od elemenata vektora A_0 s odgovarajućim pozitivnim elementom od A_s i nađimo minimalni kvocijent, tj.

$$\frac{l_{r0}}{l_{rs}} = \min_i \frac{l_{i0}}{l_{is}} = \theta, \quad (l_{is} > 0)$$

Pretpostavili smo da je početno baznčno rješenje nedegenerirano, to jest $l_{i0} > 0$ za svako i. Prema tome je $\theta > 0$.

Ako izaberemo vektor A_s da zamijeni vektor A_r u bazi, tada će se promijeniti vrijednosti linearnih formi z^1 i z^2, u $z^1 - \theta\,(z_j^1 - c_j)$ odnosno $z^2 - \theta\,(z_j^2 - d_j)$. Nismo rekli da su vrijednosti tih formi porasle, već samo da su se promijenile. Porasle bi da su $z_j^1 - c_j < 0$ i $z_j^2 - d_j < 0$, no to nas ovoga momenta ne zanima. Nas zanima kada $z = \frac{z^1}{z^2}$ raste. Drugim riječima, zanima nas je li

$$\frac{z^1 - \theta\,(z_j^1 - c_j)}{z^2 - \theta\,(z_j^2 - d_j)} - \frac{z^1}{z^2} > 0$$

Ako to jest, takva izmjena baze bi nas približila maksimalnoj vrijednosti funkcije z. Da to ispitamo, svedimo lijevu stranu na zajednički nazivnik, to jest

$$\frac{\theta\,[z^1 (z_j^2 - d_j) - z^2 (z_j^1 - c_j)]}{z^2\,[z^2 - \theta\,(z_j^2 - d_j)]} > 0$$

No $z^2 > 0$ i $z^2 - \theta\,(z_j^2 - d_j) > 0$, jer su nazivnici funkcije cilja pozitivni za sva moguća rješenja. Nadalje je $\theta > 0$. Ostaje da je

$$z^1 (z_j^2 - d_j) - z^2 (z_j^1 - c_j) > 0$$

ili

$$\Delta_j > 0$$

Tako smo došli do kriterija za izbor vektora u novu bazu. Može se pokazati da je za optimalnost rješenja dovoljan ovaj uvjet:

$$\Delta_j \leqslant 0 \text{ za svako } j.$$

K. Swarup [27] je pokazao da je $\Delta_j > 0$ u ova tri slučaja:

I slučaj

$$z_j^2 - d_j < 0$$

$$(z_j^1 - c_j) \,/\, (z_j^2 - d_j) > z^1/z^2$$

II slučaj

$$z_j^2 - d_j > 0$$

$$(z_j^1 - c_j) \,/\, (z_j^2 - d_j) < z^1/z^2$$

III slučaj

$$z_j^2 - d_j = 0$$

$$z_j^1 - c_j < 0$$

Na kraju treba napomenuti da postoji još jedna modificirana metoda slična Martosevoj, koja također koristi gradijent funkcije cilja. To je metoda Gilmore — Gomorya [10]. U odjeljku 7 prikazat ćemo u kome su kontekstu ti autori razmatrali problem razlomljeno linearnog programiranja.

5. Charnes-Cooperova metoda

A. Charnes i W. W. Cooper [4, 6] sveli su problem (1) — (3) uz pretpostavku (a) i (c), koristeći transformaciju $Y = tX$, na ova dva ordinarna problema linearnog programiranja:

(14) $$\text{Max}\,(C'Y + c_0\,t)$$

(15) $$A\,Y - A_0\,t \leq 0$$

(16) $$D'Y + D_0\,t = 1$$

(17) $$Y,\, t \geq 0$$

i

(18) $$\text{Max}\,(-C'Y - c_0\,t)$$

(19) $$A\,Y - A_0\,t \leq 0$$

(20) $$-D'Y - d_0\,t = 1$$

(21) $$Y,\, t \geq 0$$

Kad je predznak brojnika ili nazivnika poznat a priori, tada se redukcija vrši samo na jedan od ta dva problema linearnog programiranja. To slijedi iz činjenice što je

$$\max \frac{C'X + c_0}{D'X + d_0} \equiv \max\,(-1)\,\frac{D'X + d_0}{C'X + c_0}$$

U slučaju da je ispunjena pretpostavka (b), zamijeni se problem (1) — (3) sa problemom (14) — (17). Ako je nazivnik negativan, zamjena se vrši za problem (18) — (21). U svakom mogućem rješenju problema (14) — (17) i (18) — (21) je $t > 0$. Ako je Y^*, t^* optimalno rješenje jednog od tih problema, tada je

$$X^* = \frac{1}{t^*}\, Y^*$$

optimalno rješenje problema (1) — (3).

Na kraju ovoga kratkog pregleda usporedit ćemo sve tri prikazane metode sa gledišta njihove praktične upotrebe. Glavna komplikacija kod Dinkelbachove metode je u promjeni koeficijenata u funkciji cilja. Modificirana metoda Martosa zahtijeva samo nešto veći broj operacija nego obična simpleks metoda kad se primjenjuje na problem linearnog programiranja istoga opsega. Charnes-Cooperova metoda doduše radi samo sa neznatno većim modelom (jedna varijabla i jedan uvjet više) od originalnog. No, upravo taj uvjet pravi neprilike kad se procedura započinje. Naime, on ima oblik jednadžbe pa je potrebno dodati jedan artificijelni vektor.[5]) Zatim početni program je degeneriran pa je potrebno primijeniti metodu perturbacije. Sve te poteškoće, međutim, dolaze do izražaja samo kod ručnog rada. Kad je pri ruci elektronski računski stroj, prednost Charnes-Cooperova načina rješavanja je neosporna, jer svaki i najmanji numerički centar raspolaže sa programom za neku metodu što rješava probleme linearnog programiranja.

6. Numerički primjer

Razmotrimo ovaj jednostavni problem:

$$\text{Max}\; z = \frac{2x_1 + 2x_2 - 1}{x_1 + 2x_2 + 3}$$

[5]) Čim taj vektor izađe iz baze, varijabla t postaje pozitivna, tj. bazična, i takva ostaje u toku čitave procedure.

$$3x_1 + 4x_2 \leq 24$$
$$2x_1 - x_2 \leq 5$$
$$x_1,\ x_2 \geq 0$$

Ako supstituiramo $x = x_1$ i $y = x_2$ u funkciju cilja i napišemo je u implicitnom obliku, dobijemo

$$xz + 2yz + 3z - 2x - 2y + 1 = 0$$

To je specijalan slučaj plohe 2. reda u karterijskim koordinatama x, y, z. Opći slučaj, naime, izgleda ovako:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0$$

Uspoređujući te dvije jednažbe, vidimo da je $a_{11} = a_{22} = a_{33} = a_{12} = 0$, $a_{13} = \frac{1}{2}$, $a_{14} = -1$, $a_{23} = 1$, $a_{24} = -1$, $a_{34} = \frac{3}{2}$ i $a_{44} = 1$.

Koeficijenti a_{ij} ($i, j = 1, 2, 3, 4$) mogu se svrstati u kvadratnu shemu (determinantu) det(M) koja je simetrična prema glavnoj dijagonali, ako uvedemo još veličine: $a_{21} = a_{12}$, $a_{31} = a_{13}$, $a_{41} = a_{14}$, $a_{32} = a_{23}$, $a_{42} = a_{24}$, $a_{43} = a_{34}$. U našem primjeru je

$$\det(M) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ -1 & -1 & \frac{3}{2} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{4}$$

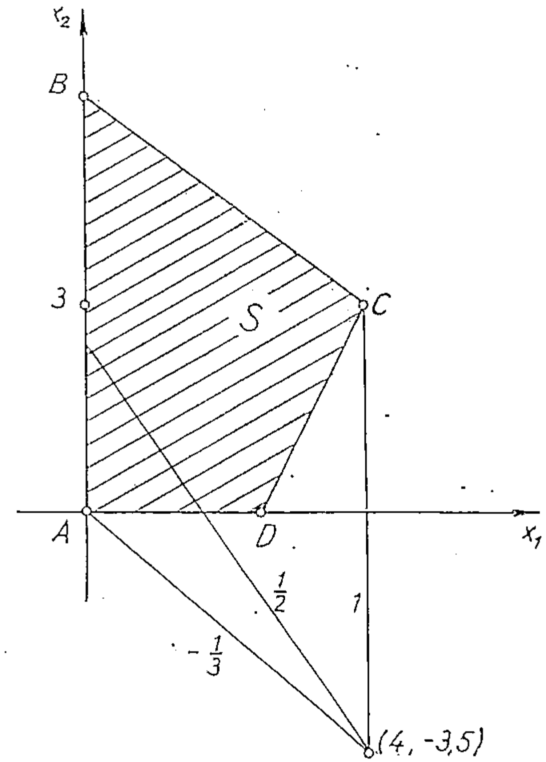
dok je subdeterminanta (i ujedno kofaktor) elemenata a_{44}, tj.

$$M_{44} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Izlazi da je $\det(M) > 0$ i $M_{44} = 0$. To su nužni i dovoljni uvjeti da ploha 2. reda bude *hiperbolički paraboloid.* Prema tome funkcija cilja u razmatranom problemu predstavlja hiperbolički paraboloid.

Na slici 1 prikazan je skup S svih mogućih rješenja našega problema. S je, kao što se vidi, četverokut sa vrhovima u tačkama A (0,0), B (0,6), C (4,3) i D(2,5; 0). Vrijednost od z na tim ekstremnim tačkama su redom $-\frac{1}{3}$, $\frac{11}{15}$, 1 i $\frac{8}{11}$. Prema tome, maksimum je jednak 1 a optimalno rješenje vektor [4,3].

Sada ćemo pokazati kako se naš problem može grafički riješiti. Na sl. 1 se vide tri pravca što se sijeku u tački (4; — 3,5). Njihove jednažbe su $-\frac{1}{3}(x_1 + 2x_2 + 3) = 2x_1 + 2x_2 - 1$, $\frac{1}{2}(x_1 + 2x_2 + 3) = 2x_1 + 2x_2 - 1$ i $x_1 + 2x_2 + 3 = 2x_1 + 2x_2 - 1$. Na tim pravcima je, dakle, vrijednost funkcije z konstantna i jednaka $-\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ odnosno 1. U presjecištu, očigledno je vrijednost od z neodređena. Drugim riječima, tačka (4; — 3,5) je nultačka i brojnika i nazivnika, tj. rješenje sistema: $2x_1 + 2x_2 - 1 = 0$, $x_1 + 2x_2 + 3 = 0$. Kad se pravac sa $z = -\frac{1}{3}$ počne vrtiti nad skupom S oko tačke (4 — 3,5)



Sl. 1

u smjeru kretanja kazaljke na satu[6]), vrijednost od z postaje sve veća. U krajnjoj tački C od S, u kojoj pravac napušta S (tj. tangira S), nalazi se optimalno rješenje. U toj tački vrijednost od z je maksimalna.

[6]) Treba primijetiti da smjer vrtnje zavisi od toga gdje je tačka oko koje se pravac vrti. Da je u našem slučaju ta tačka bila, recimo, u 2. kvadrantu, uzeli bismo pravac koji prolazi kroz ishodište i počeli ga okretati u smjeru suprotnom od kretanja kazaljke na satu.

Dinkelbachovo rješenje:

$$z_1 = -\frac{1}{3},\quad C' = [2\ 2],\quad D' = [1\ 2]$$

$$c_o = -1 \text{ i } d_o = 3$$

$$\text{Min } [(z_1 D' - C')X + z_1 d_o - c_o] = \text{Min}\left(-\frac{7}{3}x_1 - \frac{8}{3}x_2\right)$$

	Baza	A_o	A_1	A_2	A_3	A_4
			$-7/3$	$-8/3$	0	0
0	A_3	24	3	4	1	0
0	A_4	5	2	-1	0	1
	$z_j - c_j$	0	$7/3$	$8/3$	0	0
$-\frac{8}{3}$	A_2	6	$3/4$	1	$1/4$	0
0	A_4	11	$11/4$	0	$1/4$	1
	$z_j - c_j$	-16	$-1/3$	0	$-2/3$	0

Rješenje: $x_1 = 0,\ x_2 = 6$

$$z_2 = z(0,6) = 11/15$$

$$\text{Min } [(z_2 D' - C')X + z_2 d_o - c_o] = \text{Min}\left(-\frac{19}{15}x_1 - \frac{8}{15}x_2\right) + \frac{16}{5}$$

	Baza	A_o	A_1	A_2	A_3	A_4
			$-19/15$	$-8/15$	0	0
$-\frac{8}{15}$	A_2	6	$3/4$	1	$1/4$	0
0	A_4	11	$11/4$	0	$1/4$	1
	$z_j - c_j$	$-16/5$	$13/15$	0	$-2/15$	0
$-\frac{8}{15}$	A_2	3	0	1	$41/44$	$-3/11$
$-\frac{19}{15}$	A_1	4	1	0	$1/11$	$4/11$
	$z_j - c_j$	$-20/3$	0	0	$-101/165$	$-52/165$

Rješenje: $x_1 = 4,\ x_2 = 3;\ z_3 = z(4,3) = 1$

$$\text{Min } [(z_3 D' - C')X + z_3 d_o - c_o] = \text{Min } (-x_1) + 4$$

	Baza	A_o	A_1	A_2	A_3	A_4
			-1	0	0	0
0	A_2	3	0	1	$41/44$	$-3/11$
-1	A_1	4	1	0	$1/11$	$4/11$
	$z_j - c_j$	-4	0	0	$-1/11$	$-4/11$

Prema tome, opt. rješenje je $x_1 = 4,\ x_2 = 3$

Martosevo rješenje:

c_i:	d_i:	Baza	A_o	A_1	A_2	A_3	A_4
			-1	2	2	0	0
			3	1	2	0	0
0	0	A_3	24	3	4	1	0
0	0	A_4	5	2	-1	0	1
		$z_j^1 - c_j$	-1	-2	-2	0	0
		$z_j^2 - d_j$	3	-1	-2	0	0
		Δ_j	$-\frac{1}{3}$	7	8	0	0
2	2	A_2	6	$3/4$	1	$1/4$	0
0	0	A_4	11	$11/4$	0	$1/4$	1
		$z_j^1 - c_j$	11	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0
		$z_j^2 - d_j$	15	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0
		Δ_j	$\frac{11}{15}$	13	0	-2	0
2	2	A_2	3	0	1	$7/44$	$-3/11$
2	1	A_1	4	1	0	$1/11$	$4/11$
		$z_j^1 - c_j$	13	0	0	$1/2$	$2/11$
		$z_j^2 - d_j$	13	0	0	$9/22$	$-2/11$
		Δ_j	1	0	0	$-1/11$	0

Charnes-Cooperovo rješenje:

$$\text{Max } (2y_1 + 2y_2 - t)$$

$$3y_1 + 4y_2 - 24t \leq 0$$

$$2y_1 - y_2 - 5t \leq 0$$

$$y_1 + 2y_2 + 3t = 1$$

$$y_1,\ y_2\ t \geq 0$$

			2	2	−1	0	0	−M
	Baza	A_0	A_1	A_1	$T \equiv A_3$	A_4	A_5	A_6
0	A_4	0	3	4	−24	1	0	0
0	A_5	0	2	−1	− 5	0	1	0
−M	A_6	1	1	2	3	0	0	1
	$z_j - c_j$	0	−2	−2	1	0	0	0
		−1	−1	−2	−3	0	0	0
0	A_4	8	11	20	0	1	0	
0	A_5	5/3	11/3	7/3	0	0	1	
−1	A_3	1/3	1/3	2/3	1	0	0	
	$z_j - c_j$	−1/3	−7/3	−8/3	0	0	0	
2	A_2	2/5	11/20	1	0	1/20	0	
0	A_5	11/15	143/60	0	0	−7/60	1	
−1	A_3	1/15	−1/30	0	1	−1/30	0	
	$z_j - c_j$	11/15	−13/15	0	0	2/15	0	
2	A_2	3/13	0	1	0	1/13	−3/13	
2	A_1	4/13	1	0	0	−7/143	60/143	
−1	A_3	1/13	0	0	1	−5/143	2/143	
	$z_j - c_j$	1	0	0	0	1/11	4/11	

7. Primjene u operativnom istraživanju

Jedna primjena razlomljeno linearnog programiranja u operativnom istraživanju već je naznačena u 2. odeljku ovoga rada. Bila je to *maksimizacija produktivnosti rada.*

Ovdje ćemo najprije prikazati jedan način određivanja maksimalne rentabilnosti poslovanja.

1. Maksimizacija rentabiliteta

H. Seelbach [25] je uzeo između različitih pokazatelja rentabilnosti onaj koji je definiran odnosom ostvarenog dohotka (dobiti) prema uloženim sredstvima. Pri tome je pretpostavio da pojedine proizvodne aktivnosti zahtijevaju samo proporcionalne troškove i sredstva i da fiksni troškovi i fiksna korištena sredstva ne zavise o izabranoj vrsti i veličini proizvodnje. Pod tim pretpostavkama funkcija rentabiliteta izgleda ovako:

$$R = \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} c_j x_j - c_o}{\sum\limits_{j=1}^{n} d_j x_j + d_o}$$

gdje je

- x_j broj jedinica proizvoda j-te vrste;
- c_j bruto dobit po jedinici proizvoda;
- c_o fiksni, od veličine proizvodnje neovisni troškovi;
- d_j uloženi kapital po jedinici proizvoda;
- d_o fiksni kapital;
- n broj vrsta proizvoda na izboru.

Ograničenja su

$$\sum_{j=1}^{n} d_j x_j + d_o \leq k,$$

gdje je k = raspoloživa novčana sredstva (kapital). Osim kapitala su i drugi faktori proizvodnje ograničeni (kapaciteti strojeva, količine sirovine itd.), kako slijedi:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq a_{io}, \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

Parametri a_{io} predstavljaju maksimalne kapacitete, dok su a_{ij} različiti tehnološki koeficijenti.

Na primjer, raspoloživi kapital neka iznosi 3600 novčanih jedinica, fiksni kapital 800 novčanih jedinica, fiksni troškovi 300 novčanih jedinica, jedinična bruto dobit $c_1 = 1{,}5$ i $c_2 = 2$ od prve odnosno druge vrste proizvoda, kapacitet strojeva 1700 sati, količina sirovine 300 kg, uloženi kapital $d_1 = 4$ i $d_2 = 2$ novčane jedinice po jedinici proizvoda prve odnosno druge vrste, tehnološki koeficijenti za strojeve $a_{11} = 1$ i $a_{12} = 3$ sata i za sirovine $a_{21} = -1$ (jer se kod izrade prvog proizvoda pojavljuje kao otpadak koji se koristi u izradi drugog proizvoda); $a_{22} = 1$ kg a maksimalna prođa prvog proizvoda na tržištu iznosi 600 jedinica. Iz tih elemenata izgrađen je ovaj model:

$$R = \frac{1{,}5x_1 + 2x_2 - 300}{4x_1 + 2x_2 + 800}$$

$$4x_1 + 2x_2 \leq 2800$$
$$x_1 + 3x_2 \leq 1700$$
$$-x_1 + x_2 \leq 300$$
$$x_1 \qquad \leq 600$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Problem je riješen grafičkom metodom i metodom Dinkelbacha. Optimalni proizvodni program je $x_1 = 200$ i $x_2 = 500$. Dobit iznosi 1000 novčanih jedinica a maksimalni rentabilitet R (200, 500) = 5/13 ili 38,46%.

II. *Minimizacija prosječnih troškova proizvodnje*

J. Kaška i M. Píšek [15] rješavaju u poduzeću tekstilne industrije problem sniženja troškova po 1 m² tkanine. Istraživanja vrše na modelu proizvodnje koji obuhvata 166 varijabla i 66 nejednažbi.

Neka predodžba o tome radu može se dobiti iz ovoga jednostavnog zadatka:

Treba sastaviti program proizvodnje za tkaonicu na osnovi podataka iz ove tabele:

Vrsta tkanine	Širina (m)	Troškovi Kčs/m	Utrošak sirovine kg/m	
			I vrsta	II vrsta
1	0,50	5,50	0,15	0,20
2	0,55	6	0,20	0,10
3	0,60	8	0,10	0,30
4	0,80	8,80	0,10	0,40
Ukupno sirovine u kg			20	50

Potražnja za tkaninom 1. vrste nije veća od 100 m a za sve tri ostale vrste nije manja od 150 m. Vrstu i veličinu proizvodnje treba odrediti tako da troškovi po 1 m² budu minimalni.

Radi se, dakle, o problemu razlomljeno linearnog programiranja.

$$\text{Min } z = \frac{5{,}50x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 8{,}80x_4}{0{,}50x_1 + 0{,}55x_2 + 0{,}60x_3 + 0{,}80x_4}$$

$$0{,}15x_1 + 0{,}20x_2 + 0{,}10x_3 + 0{,}10x_4 \leqslant 20$$
$$0{,}20x_1 + 0{,}10x_2 + 0{,}30x_3 + 0{,}40x_4 \leqslant 50$$
$$x_1 \qquad \leqslant 100$$
$$x_2 + x_3 + x_4 \geqslant 150$$
$$x_j \geqslant 0, \ (j = 1, 2, 3, 4)$$

Optimalno rješenje (nivo realnih i raspoloživih aktivnosti):

$$x_1^* = 0, \ x_2^* = 50, \ x_3^* = 0, \ x_4^* = 100$$
$$x_5^* = 0, \ x_6^* = 5, \ x_7^* = 100, \ x_8^* = 0$$

Minimalni troškovi po 1 m² iznose 472/43 $\approx$ 11 Kčs.

III. *Minimizacija otpadaka u industriji papira*

P.S. Gilmore i R.E. Gomory [10] razmatraju jedan specijalni problem podrezivanja papira (problem of paper trim). Naime, tvornica pravi role papira prema specifikacijama potrošača. Kad se režu te role iz većih navitaka papira, nastaju otpaci w_j, gdje je

$$w_j = L - \sum_i a_{ij} \, l_i$$

pri čemu je L standardna dužina, l_i naručena dužina role i a_{ij} broj rola dužine l_i, koje se na j-ti način režu. Autori uzimaju za mjeru efikasnosti te operacije procenat otpatka.

$$\frac{\sum_j w_j x_j}{\sum_j x_j}$$

gdje je x_j broj operacija rezanja.

Ako naručena količina papira dužine l_i leži između N_i' i N_i'', ($N_i' < N_i''$), tada se problem ovako formulira:

$$\text{Min} \frac{\sum_j w_j x_j}{\sum_j x_j}$$

uz ograničenja

$$\sum_j a_{ij} x_j - s_i = N_i' \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$
$$0 \leqslant s_i \leqslant (N_i'' - N_i')$$

Treba napomenuti da se slični problemi javljaju izvan industrije papira, na primjer pri rezanju metalnih cijevi, rola celofana itd.

Osim u navedenim slučajevima primjeri upotrebe razlomljeno linearnog programiranja zabilježeni su u jednom problemu optimalne politike održavanja i popravki strojeva i opreme (M. Klein [18]), u nekim Markovskim procesima odlučivanja (C. Derman [7]), u nekim strategijskim igrama itd.

8. Pravci daljeg razvoja

U području razlomljeno linearnog programiranja ostalo je dosta otvorenih problema. K. Swarup [29, 31] je učinio tek prvi korak u pravcu dualiteta. Na primjer, još nije dokazan obrat teorema dualiteta (tj. teorema 3 iz odjeljka 2). Nije data ni ekonomska interpretacija dualnog problema.

Za sada imamo samo dva rada koji se bave uvjetima stabilnosti rješenja problema razlomljeno linearnog programiranja. S. P. Aggarwal [1] je našao granice unutar kojih mogu varirati elementi vektora iz optimalne baze, da bi baza ostala optimalna. N. J. Arbuzova [2] ispituje stabilnost rješenja u stohastičkom razlomljeno linearnom programiranju. Međutim, još nitko nije ispitivao osjetljivost rješenja na varijaciju parametara c_j i d_j iz funkcije cilja.

Ipak glavni pravac razvoja je u proširenju i generalizaciji nekih rezultata i metoda razlomljeno linearnog na razlomljeno nelinearno programiranje. A. Charnes je još 1962, u zaključku svoga rada [4,5] nagovijestio te ekstenzije i ustvrdio da je među njima najvažniji slučaj kvocijenta separabilne konkavne i konveksne funkcije. Ovu ideju razrađuju J. Kaška i M. Píšek [16,17], W. Dinkelbach [9], C. R. Bector [3] i još neki autori. Taj rad je još u toku i ozbiljnije rezultate tek treba očekivati.

LITERATURA

1. S. P. Aggarwal, *Stability of the Solution to a Linear Fractional Functional Programming Problem*, Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik (ZAMM), Bd. 46, H. 6, 1966, 343 — 349.

2. Н. И. Арбузова, *Взаимосвязь стохастической е-устойчивости задач линейного и дробно-линейного программирования специального вида*, Экономика и математические методы, Т. 4, В. 1, 1968, 108—110

3. C. R. Bector, *Non-Linear Fractional Functional Programming with Non-Linear Constraints*, ZAMM, Bd. 48, No. 4, 1968, 284—286.

4. A. Charnes and W. W. Cooper, *Programming with Fractional Functionals: I, Linear Fractional Programming*, O. N. R. Research Memorandum No. 50, 1962.

5. A. Charnes and W. W. Cooper, *Programming with Linear Fractional Functionals*, Naval Research Logistics Quarterly, Vol. 9, 1962, 181—186.

6. A. Charnes and W. W. Cooper, *Programming with Linear Fractional Functionals*, A Comment, Naval Research Logistics Quarterly, Vol. 10, No. 3, 1963, 273—274.

7. C. Derman, *On Sequencial Decisions and Markov Chains*, Management Science, Vol. 9, No. 1, 1962, 16—24.

8. W. Dinkelbach, *Die Maximierung eines Quotienten zweier linearer Functionen unter linearen Nebenbedingungen*, Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete, Bd, 1, H. 2, 1962, 141—145.

9. W. Dinkelbach, *On Nonlinear Fractional Programming*, Management Science, Vol. 13, 1967, 492.

10. P. C. Gilmore and R. E. Gomory, *A Linear Programming Approach to the Cutting Stock Problem — Part II*, Operations Research, Vol. 11, No. 6, 1963, 863—888.

11. J. R. Isbell and W. H. Marlow, *Attrition Games*, Naval Research Logistics Quarterly, Vol. 3, 1956, 71—93.

12. R. Jagannathan, *On Some Properties of Programming Problems in Parametric Form Pertaining to Fractional Programming*, Management Science, Vol. 2, No. 7, 1966, 609—615.

13. H. C. Joksch, *Programming with Fractional Linear Objective Functions*, Naval Research Logistics Quarterly, Vol. 11, No. 2—3, 1964, 197—204.

14. Е. Г. Гольштейн, Д. Б. Юдин, *Новые направления в линейном программировании*, Москва, 1966.

15. J. Kaška — M. Píšek, *Optimalizace poměrové funkce*, Podniková organizace, Sv. 18, č. 5, 1964, 228—230.

16. J. Kaška — M. Píšek, *Kvadraticko-lineární lomené programování*, Ekonomicko-matematický obzor, R. 2, č. 2, 1966, 169—173.

17. J. Kaška — M. Píšek, *Konvexně konkávní lomené programování*, Ekonomicko-matematický obzor, R. 3, č. 4, 1967, 457—463.

18. M. Klein, *Inspection — Maintenance-Replacement Schedule under Markovian Deterioration*, Management Science, Vol. 9, No. 1, 1962, 25—32.

19. B. Krčko, *Predavanja iz matematskog programiranja* (prijevod), Ekonomski fakultet Subotica, 1967.

20. S. Kurepa, *Konačno dimenzionalni vektorski prostori i primjene*, Zagreb, 1967.

21. Lj. Martić, *Matematičke metode za ekonomske analize*, Svezak II, Zagreb, 1966.

22. B. Martos, *Hiperbolikus Programozas*, MTA Mat. Kut. Intézet. Közleményei 5, 1960, 368—406.

23. B. Martos, *Hyperbolic Programming by Simplex Method*, Deuxième Congrès Mathématique Hongrois, Budapest, August 31, 1960, Akadémiai Kaidó, Budapest, 6, 1961, 44—48.

24. B. Martos, *Hyperbolic Programming*, Naval Research Logistics Quarterly, Vol. 11, No. 2—3, 1964, 135—155.

25. H. Seelbach, *Rentabilitätsmaximierung bei variablem Eigenkapital*, Zeitschrift für Betriebswirtschaft, Vol. 38. No. 4, 1968, 237—256.

26. J. Stahl, *Két Ujabb Eljárás Hiperbolikus Programozási Feladatok Megoldására*, (Two New Methods for Solution of Hyperbolic Programming), MTA Matematikai Kutatóintézet Közleméneyei 9, 1964; 743—754.

27. K. Swarup, *Linear Fractional Functional Programming*, Operations Research, Vol. 13, No. 6, 1965, 1029—1036.

28. K. Swarup, *Fractional Programming with Non-linear Contraints*, ZAMM, Bd. 46, No. 7, 1966, 468—469.

29. K. Swarup, *Some Aspects of Duality for Linear Fractional Functionals Programming*, ZAMM, Bd. 47, No. 3, 1967, 204—205.

30. K. Swarup, *Note on Linear Fractional Functionals Programming*, Metrika, Vol. 13, Fasc. 1, 1968, 72—77.

31. K. Swarup, *Duality in Fractional Programming*, Unternehmensforschung, Bd. 12, H. 2, 1968, 106—112.

(Rad primljen septembra 1968.)