EKONOMSKA ANALIZA
4, XXIII (1989), 361—412

STABILNA OPTIMALIZACIJA KONVEKSNIH MODELA MATEMATIČKOG PROGRAMIRANJA

PREGLED OBLASTI

I dio

LOKALNA ANALIZA STABILNOSTI

*Igor JEMRIĆ**

1. UVOD

Kao što je poznato, matematičko programiranje vrlo je široko primjenjivo područje primjenjene matematike. Naime, funkcioniranje mnogih realnih sistema (ekonomskih, fizikalnih, inženjerskih i dr.) moguće je, uz određeni stupanj aproksimacije, opisati matematičkim programom — programom uvjetne optimizacije jedne ili više funkcija koje opisuju ostvarenje nekog unaprijed zadanog cilja (ili više njih), pri čemu su realni fenomeni koji doprinose nivou ostvarenja tog cilja (a na koje se može utjecati) opisani varijablama matematičkog programa, tzv. varijablama odlučivanja. Na vrijednosti tih varijabli postavljena su neka funkcionalna ograničenja (u vidu sistema nejednadžbi) čime se opisuje skup svih (trenutno ili očekivano) dopustivih intenziteta tih fenomena. Prema tome, takve realne sisteme moguće je opisati slijedećim matematičkim programom:

$$
(P) \qquad \begin{aligned} &\mathrm{Min}\ f^{\circ}(x) \\ &p.o. \\ &f^{i}(x) \leq 0, \quad i \in P, \end{aligned}
$$

pri čemu je $x \in R^n$ vektor varijabli odlučivanja, $f^{\circ}(t)$ funkcija cilja[1] a $f^{i}(x)$, $i \in P = \{1, 2, \ldots, m\}$, funkcije ograničenja programa koje reprezentiraju skup dopustivih rješenja F:

* Ekonomski fakultet, Zagreb.

[1] Naravno, moguće su (i česte) situacije u kojima je potrebno maksimalizirati neki cilj uz dana ograničenja. Međutim, kako za svaki matematički program vrijedi:

$$\mathrm{Min}\ f^{\circ}(x) = -\mathrm{Max}\ (-f^{\circ}(x)),$$

promatrajući samo program tipa (P) ne gubi se na općenitosti pa će se u ovom radu, radi jednostavnosti, promatrati samo programi (i kasnije modeli) minimalizacije funkcije cilja.

$$F = \{x \in R^n: \; f^i(x) \leq 0, \; i \in P\}.$$ [2]

Optimalno (ravnotežno, racionalno) stanje sistema reprezentira se optimalnim rješenjem programa (P), tj. vektorom $\tilde{x} \in F$ koji minimalizira funkciju cilja $f^0(x)$ na skupu dopustivih rješenja, tj. za koji vrijedi:

$$f^0(\tilde{x}) \leq f(x) \qquad \forall x \in F.$$

Osnovni elementi matematičkog programa su, dakle, varijable odlučivanja koje opisuju fenomene »na koje se može utjecati«, funkcionalni oblik njihove povezanosti (kako u cilju tako i u ograničenjima) te fiksne parametre programa koji se pojavljuju kao koeficijenti uz varijable odlučivanja, odnosno kao konstantni članovi, u funkcijama $f^i(t)$, $i \in \{0\} \cup P$. Dok je pitanje izbora varijabli odlučivanja i njihovog funkcionalnog povezivanja pitanje same prirode sistema koji se opisuje i bazira na prikladnoj teorijskoj podlozi i/ili empirijskoj analizi, pitanje izbora fiksnih parametara, pa i sam njihov fiksni karakter, ostaje jedan od najznačajnjih problema vezanih uz primjenu matematičkog programiranja, posebnu u opisu društvenih sistema.

Radi ilustracije, promotrimo jednostavni linearni program standardnog problema neoklasične teorije poduzeća[3] (vidjeti npr. [01], [03], [07]):

$$(\mathrm{TP}) \qquad \begin{array}{ll} & \mathrm{Max}\; p^T x \\ p.\,o. & \\ & Ax \leq b, \\ & x \geq 0, \end{array}$$

pri čemu je $x \in R^n$ vektor nivoa proizvodnje n proizvoda poduzeća, $p \in R^n$ vektor danih cijena tih proizvoda na tržištu, $A \in R^{m \times n}$ matrica tehnoloških koeficijenata te $b \in R^m$ vektor raspoloživih količina resursa poduzeća. Očigledno, poduzeće želi maksimalizirati svoju dobit na tržištu (uz dane cijene) prodajom proizvoda koje proizvodi uz danu tehnologiju i dane resurse. Ovakav matematički opis ove rudimentarne mikroekonomske situacije može imati smisla (uz mnogobrojne koncepcij-

---

[2] Ovdje, kao i u čitavom radu, pretpostavlja se da je realna ograničenja moguće opisati sistemom od konačno mnogo nejednadžbi. Problemi s beskonačno mnogo ograničenja spadaju u oblast tzv. semi-infinitnog programiranja koje izlazi izvan okvira ovog rada.

[3] Ovaj program nije sveden na program tipa (P) radi njegove lakše interpretacije.

ske ograde) samo u vrlo kratkom roku. Kakvo značenje informacija o optimalnom proizvodnom programu može imati za donosioca odluka ako je dobivena uz arbitrarno fiksne intenzitete takvih fenomena kao što su tehnološki koeficijenti, tržišne cijene ili raspoložive količine resursa, koji su po svojoj prirodi izrazito varijabilni?

Jasno, matematičko programiranje razvijalo se i u pravcu rješavanja (ili barem ublažavanja) ovog problema determinističkog karaktera matematičkog programa. Jedan mogući pristup je unošenje stohastičkih elemenata u program, čime se razvila posebna oblast matematičkog programiranja — stohastičko programiranje. Drugi, vrlo stari pristup je davanje obilnijih informacija dodatnom analizom programa (P). Prvi korak u tom pravcu je postupak postoptimalne analize osjetljivosti programa na promjene polaznih vrijednosti koeficijenata, u smislu utvrđivanja »dozvoljenih« promjena vrijednosti tih koeficijenata koje ne uzrokuju promjenu optimalne strukture programa. Drugi korak, kojim se djelomično otklanja izraziti lokalni karakter prethodne analize jest sistematska analiza osjetljivosti primjenom tzv. parametarskog programiranja. Parametarsko programiranje daje informaciju ne samo o promjenama vrijednosti koeficijenata koje ne uzrokuju promjene u optimalnoj strukturi već i način promjene te strukture uslijed arbitrarno velikih neprekinutih promjena vrijednosti koeficijenata. To se postiže *uključivanjem* dodatnih, tzv. parametarskih varijabli koje u programu predstavljaju varijabilne koeficijente. Time program (P) poprima (u općem slučaju) slijedeći oblik:

$$(P, \Theta) \quad \begin{array}{l} \underset{(x)}{\text{Min}}\ f^{\circ}(x, \Theta) \\ p.\ o. \\ f^{i}(x, \Theta) \leq 0,\ i \in P \\ \Theta \in I, \end{array}$$

pri čemu je $\Theta \in R^p$ vektor parametarskih varijabli a $I \subseteq R^p$ arbitrarno određen (recimo) konveksan skup dopustivih vrijednosti parametarskih varijabli (ostale oznake odgovaraju onima iz programa (P)). Treba primijetiti da se parametarske varijable suštinski razlikuju od varijabli odlučivanja. Svako fiksno $\Theta \in I$ generira »svoj« matematički program tipa (P) i „svoje" optimalne vrijednosti varijabli odlučivanja.

U navedenom primjeru iz teorije poduzeća, ta različita uloga parametarskih varijabli od varijabli odlučivanja proizlazi iz činjenice da su nivoi proizvodnje, opisani varijablama odlučivanja, ti o kojima treba donositi odluke dok su, recimo, tržišne cijene veličine čijih je vrijednosti kretanje van domašaja donosioca odluka (unutar ovog teorijskog okvira) i njihove vrijednosti se *ne optimaliziraju*. Međutim, da li je ista situacija i kod promjene raspoloživih količina pojedinih resursa? Svakako nije. Donosilac odluka unutar poduzeća može (i mora) odlučivati o tome da li će (i u kojoj mjeri) povećavati svoje kapacitete u skladu s efektima tih promjena na njegov cilj. Već i sam termin „cijena u sjenci" iz teorije dualnosti u linearnom programiranju, kao interna cijena dodatnog angažiranja jedinice nekog resursa u smislu njenog efekta na vrijednost funkcije cilja govori o vrlo staroj intenciji da se promjenom tih koeficijenata svjesno utječe na poboljšanje optimalne vrijednosti funkcije cilja. Slična situacija je i s koeficijentima matrice A, tehnološkim koeficijentima, koji se također mogu svjesno mijenjati (unutar raspoložive „knjige tehnologije") u svrhu povećanja dobiti poduzeća.

Dakle, postoje situacije (u stvari, vrlo su česte) u kojima ima smisla (i potrebno je) utvrđivati ne samo optimalne vrijednosti varijabli odlučivanja već i optimalne vrijednosti (barem nekih) koeficijenata, tj. one vrijednosti koeficijenata koje će generirati optimalan matematički program u smislu ostvarivanja najbolje moguće vrijednosti funkcije cilja.

Uz ovakav pristup (*dvonivojskog* optimaliziranja i po varijablama odlučivanja i po parametarskim varijablama), problem (P, Θ) naziva se *model matematičkog programiranja* (model MP) i predstavlja predmet izučavanja konceptualno novog nivoa optimalizacije — *stabilne optimalizacije modela matematičkog programiranja* (u literaturi često se koristi i termin optimalizacija inputa, odnosno ulaznih podataka), kao kvalitativno novog koraka ne samo u razvoju parametarskog programiranja već i u razvoju teorije uvjeta optimalnosti.

Optimalizacija modela matematičkog programiranja novo je područje parametarskog programiranja (razvija se u toku poslijedjnih pet godina) i predstavlja još uvijek nezavršeno područje u okviru kojeg su mnoga pitanja ostala otvorena. Međutim, za specifične modele MP (tzv. konveksne modele MP) u konačnodimenzionalnim i apstraktnim prostorima postignuti su mnogobrojni rezultati konstruktivne prirode koji čine relativno zaokruženu cjelinu.

Začetnik ideje stabilne optimalizacije modela MP i autor velike većine rezultata iz tog područja je S. Zlobec, čiji radovi predstavljaju osnovnu literaturu korištenu pri izradi ovog pregleda. Pregled ne sadrži originalne rezultate autora već mu je cilj da poveže i sistematizira do sada postignute rezultate u ovom području, od kojih velika većina nije objavljena na našem jeziku.

Pregled osnovnih ideja stabilne optimalizacije modela MP podijeljen je u dva dijela: prvi dio obrađuje stabilnost modela MP kao jedno od ključnih pitanja optimalizacije modela MP dok se drugi dio odnosi na prikaz rezultata vezanih uz karakterizaciju optimalnosti modela MP.

Obzirom da je za razumijevanje ovog područja potrebno poznavanje nekih osnovnih elemenata konveksne analize te nekih pojmova iz teorije višeznačnih preslikavanja, na početku prvog dijela ovog pregleda dana je matematička priprema u okviru koje se uvode potrebni pojmovi. U nastavku, ukratko je izložena osnovna ideja koncepta stabilne optimalizacije modela MP da bi centralni prostor ovog dijela pregleda bio posvećen detaljnom prikazu teorijskih rezultata vezanih uz analizu stabilnosti konveksnih modela MP. Na kraju, izložene su i neke metode koje je moguće koristiti u okviru te analize.

2. MATEMATIČKA PRIPREMA

2.1. *Višeznačna preslikavanja*

Višeznačno preslikavanje. $\Gamma : Z \to X$, $Z \subset R^p$, $X \subset R^n$, je preslikavanje koje elementima skupa Z pridružuje skupove elemenata iz skupa X. Povezanost optimalizacije modela matematičkog programiranja s višeznačnim preslikavanjima lako je shvatljiva ako se uoči da model matematičkog programiranja (P, Θ) za svako fiksno Θ postaje matematički program (P) s pripadnom optimalnom vrijednošću funkcije cilja, pripadnim skupom dopustivih rješenja te skupom optimalnih rješenja. Prema tome, promatrano odvojeno, svako $\Theta \in I$ preslikava se u optimalnu vrijednost funkcije cilja, u skup dopustivih rješenja te u skup optimalnih rješenja. Dok je prvo preslikavanje skalarna funkcija, preostala dva preslikavanja su višeznačna (preslikavaju točku u skup). Upravo ta preslikavanja imaju značajnu ulogu u optimalizaciji modela matematičkog programiranja. U stvari, jedno od osnovnih područja interesa optimalizacije modela MP je ponašanje tih preslikavanja s aspekta njihove neprekinutosti pa se stoga u ovom poglavlju definira neprekinutost višeznačnih preslikavanja.

Neprekinutost višeznačnih preslikavanja može se definirati na različite načine. U ovom poglavlju izložena su dva koncepta definiranja tog pojma, za koje se u kontekstu ovog rada može tvrditi da su ekvivalentni. Prvi koncept, prema C. Berge ([05]), definira neprekinutost višeznačnog preslikavanja na slijedeći način:

Definicija 2.1

(i) Višeznačno preslikavanje Γ: $Z \to X$ je poluneprekinuto odozdo u Θ^* ako, za svaki otvoreni skup $A \subseteq X$ koji zadovoljava $A \cap \Gamma(\ \ ^*) \neq \emptyset$ postoji okolina $N(\Theta^*)$ od Θ^* takva da je $A \cap \Gamma(\Theta) \neq \emptyset$ za svako $\Theta \in N(\Theta^*)$;

(ii) višeznačno preslikavanje Γ: $Z \to X$ je poluneprekinuto odozgo u θ^* ako, za svaki otvoreni skup $A \subseteq X$ koji sadrži $\Gamma(\Theta^*)$ postoji okolina $N(\Theta^*)$ od Θ^* takva da za svako $\Theta \in N(\Theta^*)$, $\Gamma(\Theta) \subseteq A$.

(iii) višeznačno preslikavanje Γ: $Z \to X$ je neprekinuto u Θ^* ako je ipoluneprekinuto odozdo i poluneprekinuto odozgo u Θ^*.

Ako je višeznačno preslikavanje Γ: $Z \to X$ poluneprekinuto odozdo u svakoj točki od Z, tada kažemo da je ono poluneprekinuto odozdo na Z. Nadalje, ako je Γ poluneprekinuto odozgo u svakoj točki od Z uz $\Gamma(\Theta)$ kompakt za svako $\Theta \in Z$, tada je ono poluneprekinuto odozgo na Z. Analogno, ako je Γ poluneprekinuto odozdo i odozgo na Z, tada je ono neprekinuto na Z.

Drugi koncept neprekinutosti višeznačnih preslikavanja, prema W. W. Hogan ([11]), koristi svojstva grafova tih preslikavanja.

Definicija 2.2

Graf višeznačnog preslikavanja Γ: $Z \to X$ je skup $G \subseteq Z \times X$, definiran kao

$$G = \{(\Theta, x) \in Z \times X : x \in \Gamma(\Theta)\}.$$

Definicija 2.3

(i) Višeznačno preslikavanje Γ: $Z \to X$ je otvoreno u $\Theta^* \in Z$ ako, za dani niz $\Theta^k \to \Theta^*$ i $x^* \in \Gamma(\Theta^*)$, postoji vrijednost m i niz $\{x^k\} \subseteq X$ takvi da je $x\} \in \Gamma(\Theta^k)$ za svako $k > m$ i $x^k \to x^*$;

(ii) višeznačno preslikavanje Γ: $Z \to X$ je zatvoreno u $\Theta^* \in Z$ ako, za dani niz $\Theta^k \to \Theta^*$ i $x^k \in \Gamma(\Theta^k)$ takav da $x^k \to x^*$, slijedi da je $x^* \in \Gamma(\Theta^*)$;

(iii) višeznačno preslikavanje Γ: $Z \to X$ je neprekinuto u $\Theta^* \in Z$ ako je iotvoreno i zatvoreno u Θ^*.

Ako je preslikavanje Γ: $Z \to X$ otvoreno (zatvoreno) u svakoj točki iz Z, kažemo da je ono otvoreno (zatvoreno) na Z.

Treba primijetiti da je Γ: $Z \to X$ zatvoreno na Z ako, i samo ako, je graf tog preslikavanja zatvoren skup u $Z \times X$.

Povezanost između ova dva koncepta neprekinutosti višeznačnih preslikavanja svodi se na slijedeće:

(i) definicije poluneprekinutosti odozdo i otvorenosti višeznačnog preslikavanja Γ: $Z \to X$ su ekvivalentne;

(ii) Ako je $\Gamma(\Theta^*)$ zatvoren skup i Γ: $Z \to X$ poluneprekinuto odozgo u Θ^*, tada je Γ zatvoreno u Θ^*. Za ekvivalenciju ovih dvaju pojmova potrebno je i da je Γ uniformno kompaktno u okolini od Θ^*, tj. da je zatvarač skupa $\bigcup \Gamma(\Theta)$ kompakt, gdje je $N(\Theta^*)$ neka okolina od Θ^*.

$\Theta \in N(\Theta^*)$

U ovom radu koristiti će se definicija 2.1, odnosno pojmovi poluneprekinutosti odozdo i odozgo višeznačnih preslikavanja. Međutim, kako su pojmovi poluneprekinutosti odozdo i otvorenosti ekvivalentni, u dokazima pojedinih teorema koristi se i svojstvo otvorenosti višeznačnih preslikavanja iskazano u definiciji 2.3 (i), a u određenim situacijama (koje to dozvoljavaju) i svojstvo zatvorenosti iskazano u definiciji 2.3 (ii).

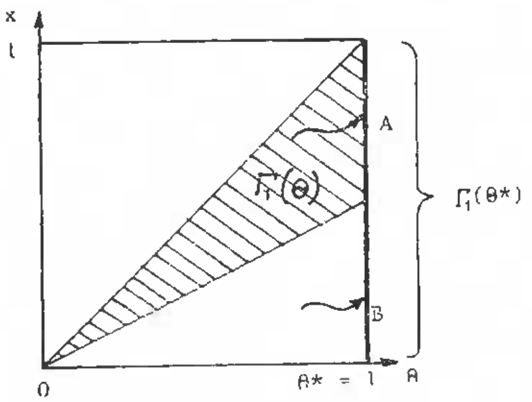
Gore navedeni pojmovi ilustrirani su primjerom:

Primjer 2.1

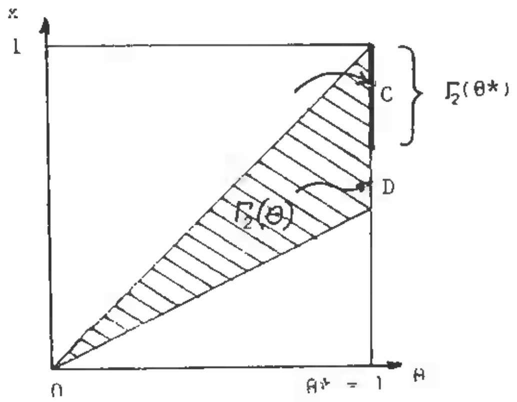
Zada su višeznačna preslikavanja Γ_1: $R \to R$ i Γ_2: $R \to R$, na slijedeći način:

$$\Gamma_1(\Theta) = \begin{cases} \left[\frac{1}{2}\Theta, \Theta\right] & za\ \Theta \in [0,1) \\ [\,0,1\,] & za\ \Theta = 1 \end{cases}, \quad \Gamma_2(\Theta) = \begin{cases} \left[\frac{1}{2}\Theta, \Theta\right] & za\ \Theta \in [0,1) \\ \left[\frac{3}{4}, 1\right] & za\ \Theta = 1 \end{cases}$$

Grafovi ovih preslikavanja prikazani su na slici 1.a) (Γ_1), odnosno 1.b) (Γ_2):



Slika 1.a)



Slika 1.b)

Preslikavanje Γ_1 očito je poluneprekinuto odozgo u točki $\Theta^* = 1$ jer je granična točka svake putanje unutar grafa tog preslikavanja također u tom grafu (primjer: putanja koja teži u A). Međutim, preslikavanje Γ_1 nije i poluneprekinuto odozdo u točki $\Theta^* = 1$ jer postoji $x^* \in \Gamma_1(\Theta^*)$ i putanja $(\Theta^k, x^k) \to (\Theta^*, x^*)$ za koju ne postoji dovoljno veliko $m > 0$, takvo da dio te putanje za $k > m$ leži unutar grafa preslikavanja Γ_1 (primjer: putanja koja teži u B). Preslikavanje Γ_2 jest poluneprekinuto odozdo u točki $\Theta^* = 1$ — putanja koja teži u C je primjer putanje koja ne leži čitava u grafu preslikavanja Γ_2, ali ipak ne ruši svojstvo poluneprekinutosti odozdo tog preslikavanja jer postoji $m > 0$ za koje je $(\Theta^k, x^k) \Rightarrow C$, $k > m$, unutar grafa tog preslikavanja.

Međutim, ovo preslikavanje nije i poluneprekinuto odozgo u $\Theta^* = 1$, jer postoji putanja koja leži unutar njegovog grafa a da njena granična točka nije unutar tog grafa (primjer: putanja koja teži ka D).

Preslikavanje $\Gamma_3 = [0.5\Theta, \Theta]$ za $\Theta \in [0, 1]$ je poluneprekinuto i odozgo i odozdo pa je, prema definiciji 2.1 (iii), neprekinuto.

Ilustracija ovih pojmova na konkretnim višeznačnim preslikavanjima vezanim uz konveksne modele MP može se naći u okviru analize stabilnosti tih modela u 4. poglavlju ovog pregleda.

2.2. *Osnovni pojmovi*

Iz uvodnog dijela poznat je pojam matematičkog programa (P). Obzirom da se ovaj pregled odnosi na stabilnu optimalizaciju *konveksnih* modela MP, u ovom odjeljku podsjetiti ćemo se na specifičan matematički program, tzv. konveksni program te na neka njegova ključna svojstva. Ovdje se također uvode i neki osnovni pojmovi iz konveksnog programiranja koji se koriste u ovom pregledu. (Opširnije informacije o ovim pojmovima kao i dokazi ovdje navedenih tvrdnji mogu se naći u [04].)

Dakle, promatra se konveksan program (K):

$$\min f^0(x)$$

p.o.

$$f^i(x) \leq 0, \quad i \in P$$

gdje su f^i: $R^n \to R$, $i \in \{0\} \cup P$, *konveksne* funkcije i $P = \{1, 2, \ldots m\}$ konačan skup indeksa.

Lako je pokazati (vidjeti npr. [14] da je dopustiv skup ovog programa

$$F = \{x \in R^n : f^i(x) \leq 0, \ i \in P\} \tag{2.1}$$

konveksan skup. Drugo važno svojstvo konveksnih programa je slijedeće:

Svako lokalno optimalno rješenje[4] konveksnog programa (K) ujedno je i njegovo (globalno) optimalno rješenje.
(Dokaz se također može naći u [14].)

(Valja uočiti da je i svaki linearni program također specifičan slučaj konveksnog programa (K).)

Definicija 2.4

Neka je $F \subseteq R^n$ zatvoren konveksan skup i neka je $x^* \in F$. Tada vektor $d \in R^n$ predstavlja dopustiv smjer na F u x^* ako postoji $T > 0$ takvo da je

$$x^* + td \in F \ \forall t \in [0, T]. \tag{2.2}$$

Skup svih dopustivih smjerova na F u x^* označava se s $D(F, x^*)$.

Definicija 2.5

Za neku funkciju $f : R \to R^n$ i točku $x^* \in \mathrm{dom}\, f$ te za neku relaciju "R", definira se skup

$$D_f^R(x^*) = \{d \in R^n : \exists T > 0 \ni f(x^* + td) \, R \, f(x^*) \ \forall t \in [0, T]\}. \tag{2.3}$$

Konkretno, za "R" = "<", "=" itd, definiraju se

$$D_f^<(x^*) = \{d \in R^n : \exists T > 0 \ni f(x^* + td) < f(x^*) \ \forall t \in [0, T]\} \tag{2.4}$$

(skup smjerova opadanja funkcije f u x^*),

$$D_f^=(x^*) = \{d \in R^n : \exists T > 0 \ni f(x^* + td) = f(x^*) \ \forall T \in [0, T]\} \tag{2.5}$$

(skup smjerova konstantnosti funkcije f u x^*), itd.
Za skup funkcija $\{f^k : k \in \Omega \subset P\}$ koriste se slijedeće oznake:

$$D_k^R(x^*) = D_{f^k}^R(x^*), \tag{2.6}$$

$$D\Omega^R(x^*) = \bigcap_{k \in \Omega} D_k^R(x^*), \tag{2.7}$$

[4] x^* je lokalno optimalno rješenje programa (K) ako je

$$f^0(x^*) \leq f^0(x) \text{ za svako } x \in F \cap N(x^*),$$

gdje je $N(x^*)$ proizvoljna okolina točke x^*.

gdje se za $\Omega = \emptyset$, $D_{\emptyset}^{R}(x^*)$ *interpretira kao* R^n.

Skup $D_f^{=}(x^*)$ (kao i skup $D_f^{\leq}(x^*)$) je po definiciji konus dok je skup $D_f^{<}(x^*)$ tupi konus.[5] Ako je f konveksna funkcija, $D_f^{<}(x^*)$ i $D_f^{\leq}(x^*)$ su konveksni dok je $D_f^{=}(x^*)$ konveksan konus ako je f konveksna funkcija, diferencijabilna u x^*. Za diferencijabilne funkcije vrijedi i

$$D_f^{<}(x^*) = \{d : \nabla f(x^*)^T d < 0\} \tag{2.8}$$

(što će se koristiti u prikazu uvjeta optimalnosti diferencijabilnih konveksnih programa pomoću gradijenata). Nadalje, za konveksne funkcije vrijedi i slijedeće:

$$D_f^{\leq}(x^*) = D_f^{<}(x^*) \cup D_f^{=}(x^*). \tag{2.9}$$

Za tzv. vjerno konveksne funkcije[6] može se pokazati da skup smjerova konstantnosti od f u x^* ne ovisi o x^*, tj. da je

$$D_f^{=}(x^*) = N\left(\begin{bmatrix} A \\ a \end{bmatrix}^T\right) \tag{2.10}$$

gdje je N(A) nula-prostor matrice A.

Definicija 2.6

Neka je konveksan skup F reprezentiran konačnim skupom ograničenja (nejednadžbi):

$$F = \{x \in R^n : f^i(x) \leq 0,\ i \in P\} \tag{2.11}$$

gdje je P konačni skup indeksa a f^i, $i \in P$, *konveksne funkcije. Tada je za neko* $x^* \in F$

$$P(x^*) = \{i \in P : f^i(x^*) = 0\}, \tag{2.12}$$

skup indeksa aktivnih ograničenja u x^*.

---

[5] Skup K je konus ako $x \in K$, $\lambda \geq 0$ povlači $\lambda x \in K$.

Skup K je tupi konus ako $x \in K$, $\lambda > 0$ povlači $\lambda x \in K$.

[6] Funkcija $f : R^n \to R$ je vjerno konveksna ako se može prikazati kao

$$f(x) = h(Ax + b) + a^T x + \alpha, \tag{3.F1}$$

gdje je A matrica reda m x n, a i b vektor-stupci reda n i m respektivno, α skalar a $h : R^m \to R$ striktno konveksna funkcija. U vjerno konveksne funkcije ubrajaju se sve analitičke konveksne funkcije.

Nadalje, definira se skup

$$P^{=} = \bigcap_{x \in F} P(x) = \{i \in P : f^i(x) = 0 \ \ \forall \ x \in F\}, \tag{2.13}$$

minimalni skup indeksa aktivnih ograničenja na skupu F.

Obzirom da je $P^{=} \subseteq P(x^*) \subseteq P$, uvode se i slijedeće oznake:

$P^{\angle}(x^*) = P(x^*) \backslash P^{=}$ — komplement od $P^{=}$ obzirom na $P(x^*)$ (2.14)

$P^{\angle} = P \backslash P^{=}$ — komplement od $P^{=}$ obzirom na P. (2.15)

Za konveksan skup F (definiran kao u (definiciji (2.6) moguće je pomoću skupa $P(x^*)$ uspostaviti vezu između skupa dopustivih smjerova i skupa nerastućih smjerova funkcija ograničenja:

$$D(F, x^*) = D_{P(x^*)}^{\leq}(x^*), \tag{2.16}$$

tj. skup mogućih smjerova na skupu F u x^* jednak je presjeku skupova nerastućih smjerova svih atkivnih ograničenja u x^*.

Definicija 2.7

Skup svih vektora $x \in R^n$ koji zadovoljavaju ograničenja aktivna na čitavom skupu F označava se s $F^{=}$ i definira na slijedeći način:

$$F^{=} = \{x \in R^n : f^i(x) = 0 \ \ \forall \ i \in P^{=}\}, \tag{2.17}$$

pri čemu je $F^{=} = R^n$ za $P^{=} = \emptyset$.

(Treba primijetiti da je $F^{=}$ moguće zapisati i kao

$$F^{=} = \{x \in R^n : f^i(x) \leq 0 \ \ \forall \ i \in P^{=}\}, \tag{2.18}$$

što je posljedica (2.17).)

Može se pokazati da za vjerno konveksne funkcije ograničenja vrijedi

$$F^{=} = x^{\circ} + \bigcap_{i \in P} = D_i^{=}(x^{\circ}), \tag{2.19}$$

gdje je $x^{\circ} \in F$ proizvoljna ali fiksna točka u F.

3. STABILNA OPTIMALIZACIJA MODELA MATEMATIČKOG PROGRAMIRANJA

U ovom poglavlju izložena je osnovna ideja procesa optimalizacije modela matematičkog programiranja, uz prikaz etapa njegova odvijanja. Također je učinjen i letimičan osvrt na *poteškoće* koje se u tom procesu javljaju te ograničenja njegove primjene. Već u uvodnom dijelu spomenuto je da se ovaj rad ograničava na optimalizaciju *konveksnih* modela matematičkog programiranja u *konačno-dimenzionalnim* vektorskim prostorima.[7] Dakle, promatra se slijedeći konveksni model MP (K, Θ):

$$\min f^{\circ}(x, \Theta)$$

p. o.

$$f^{i}(x, \Theta) \leq 0, \; i \in P,$$

$$\Theta \in I,$$

gdje je $x = [x_j] \in R^n$ vektor varijabli (odlučivanja), $\Theta = [\Theta_k] \in R^p$ vektor parametara (ulaznih podataka), $P = \{1, 2, \ldots, m\}$ *konačan* skup indeksa ograničenja, $f^i(x, \Theta)$, $i \in \{0\} \cup P$, funkcije *neprekinute* po x i po Θ te *konveksne* po x za svako $\Theta \in I$, dok je $I \subseteq R^p$ konveksan kompakt.[8]

Svako fiksno $\Theta \in I$ određuje konkretnu realizaciju modela tj. pripadni matematički program.

Model (K, Θ) promatra se kao »crna kutija« koja za svaki ulaz $\Theta \in I$ generira odgovarajući izraz $\{F(\Theta), \tilde{F}(\Theta), \tilde{f}(\Theta)\}$, pri čemu je

$$F(\Theta) = \{x \in R^n : f^i(x, \Theta) \leq 0, \; i \in P\} \text{ — dopustiv skup,} \tag{3.1}$$

$$\tilde{x}(\Theta) \text{ — optimalno rješenje,}$$

$$\tilde{F}(\Theta) = \{\tilde{x}(\Theta)\} \text{ — skup optimalnih rješenja,} \tag{3.2}$$

$$\tilde{f}(\Theta) = f^{\circ}(\tilde{x}(\Theta), \Theta) \text{ — funkcija optimalne vrijednosti.} \tag{3.3}$$

Pri tome, model (K, Θ) uvijek se promatra obzirom na neko referentno, *početno stanje* $\Theta = \Theta^{\circ}$, odnosno, *početnu realizaciju* (K, Θ°). Primjena optimalizacije modela MP ograničava se samo na modele (K, Θ) s takvim funkcijama cilja $f^{\circ}(x, \Theta)$ za koje početno stanje $\Theta = \Theta^{\circ}$ generira omeđen i neprazan skup optimalnih rješenja $\tilde{F}(\Theta^{\circ})$. Za takve funkcije cilja kaže se da su *realistične u* Θ°. Međutim, pretpostavka realističnosti funkcije cilja u početnom stanju modela nije bitno ograničavajuća jer je u pravilu svi realni sistemi opisani modelom (K, Θ) zadovoljavaju.

[7] Nedavno je formulirana i stabilna optimalizacija modela MP u apstraktnim prostorima (u [15], gdje se može naći i primjer s funkcionalima u $C_{[0, T]}$).

[8] $\Theta \in I$ nije ograničavajuća pretpostavka — I može biti i čitav R^p, ali je *razumno pretpostaviti* da za većinu realnih sistema variranje parametara najčešće ima smisla samo unutar nekog zadanog konveksnog kompakta u R^p.

Jedan od bitnih problema vezanih uz optimalizaciju modela matematičkog programiranja je pitanje stabilnosti modela, odnosno pitanje neprekinute ovisnosti optimalnog rješenja i optimalne vrijednosti modela o ulaznim podacima (parametrima). Suprotno uobičajenom pristupu problemu stabilnosti modela u smislu njene karakterizacije (najčešće nekonstruktivne prirode), optimalizaciji modela MP prilazi se na drugačiji način. Naime, lokalnom analizom modela (K, Θ) pokušavaju se identificirati dijelovi parametarskog prostora R^p (odnosno njegovog relevantnog podskupa I), vezani uz početno stanje modela, unutar kojih neprekinute promjene vektora parametara uzrokuju neprekinute promjene dopustivog skupa, skupa optimalnih rješenja te funkcije optimalne vrijednosti. Drugim riječima, utvrđuju se uvjeti pod kojima se, uslijed promjene ulaza, izlaz mijenja neprekinuto. Različiti takvi uvjeti, odnosno takvi dijelovi parametarskog prostora, nazivaju se *područja stabilnosti u* Θ° modela (K, Θ), a perturbacije (promjene vrijednosti parametara) modela unutar tih područja nazivaju se stabilne *perturbacije* modela.

Osnovni zadatak optimalizacije modela matematičkog programiranja jest određivanje »najprihvatljivije« *stabilne* putanje od inicijalnog (početnog) ulaza Θ° do *lokalnog optimalnog ulaza* Θ^* tj. ulaza koji lokalno optimalizira funkciju optimalne vrijednosti $\tilde{f}(\Theta)$. Tada je pripadni program (K, Θ^*) *lokalno optimalna realizacija modela* (K, Θ) obzirom na početni ulaz Θ°. Naravno, lokalno optimalni ulaz i pripadna lokalno optimalna realizacija modela nisu jedinstveni jer njihovo određivanje ovisi o početnom ulazu Θ° (za različite Θ° mogu se dobiti bitno različiti Θ^*) te o izboru strategije kojom se poboljšava vrijednost funkcije cilja.

(Uočimo da ovakvi fenomeni ne postoje u matematičkom programiranju gdje optimalno rješenje x^* ne ovisi o trenutnom stanju sistema.)

Proces optimalizacije modela matematičkog programiranja odvija se u četiri etape:

I etapa: lokalna analiza stabilnosti modela (K, Θ) pri početnom ulazu $\Theta = \Theta^\circ$;

II etapa: konstrukcija stabilne putanje od početnog ulaza $\Theta = \Theta^\circ$ do nekog »boljeg« ulaza Θ, tj. stabilne putanje po kojoj se smanjuje vrijednost (nepoznate) funkcije optimalne vrijednosti $\tilde{f}(\Theta)$;

III etapa: identifikacija lokalno optimalnog ulaza Θ^* i pripadne lokalno optimalne realizacije modela (K, Θ^*);

IV etapa: izbor »najbolje«, tj. najprihvatljivije putanje o (Θ) između svih stabilnih putanja $\Theta^\circ \rightarrow \Theta^*$.

Prva etapa sastoji se u određivanju područja stabilnosti vezanih uz početni ulaz $\Theta = \Theta^\circ$ (područja stabilnosti određena su skupom nejednadžbi, najčešće linearnih, u varijablama Θ_k, $k = 1, 2, \ldots, p$).

Druga etapa odnosi se na konstrukciju stabilne putanje, unutar područja stabilnosti, koja poboljšava optimalnu vrijednost funkcije cilja. Prva i druga etapa iterativne su prirode, tj. sukcesivno poboljšavaju (smanjuju) vrijednost funkcije optimalne vrijednosti unutar područja stabilnosti, koja se konstruiraju za svako novo (»bolje«) Θ^l, $l = 1, 2, \ldots$ Kao osnova za konstrukciju stabilne putanje koristi se tzv. formula za marginalnu vrijednost (koja će biti određena u drugom dijelu pregleda).

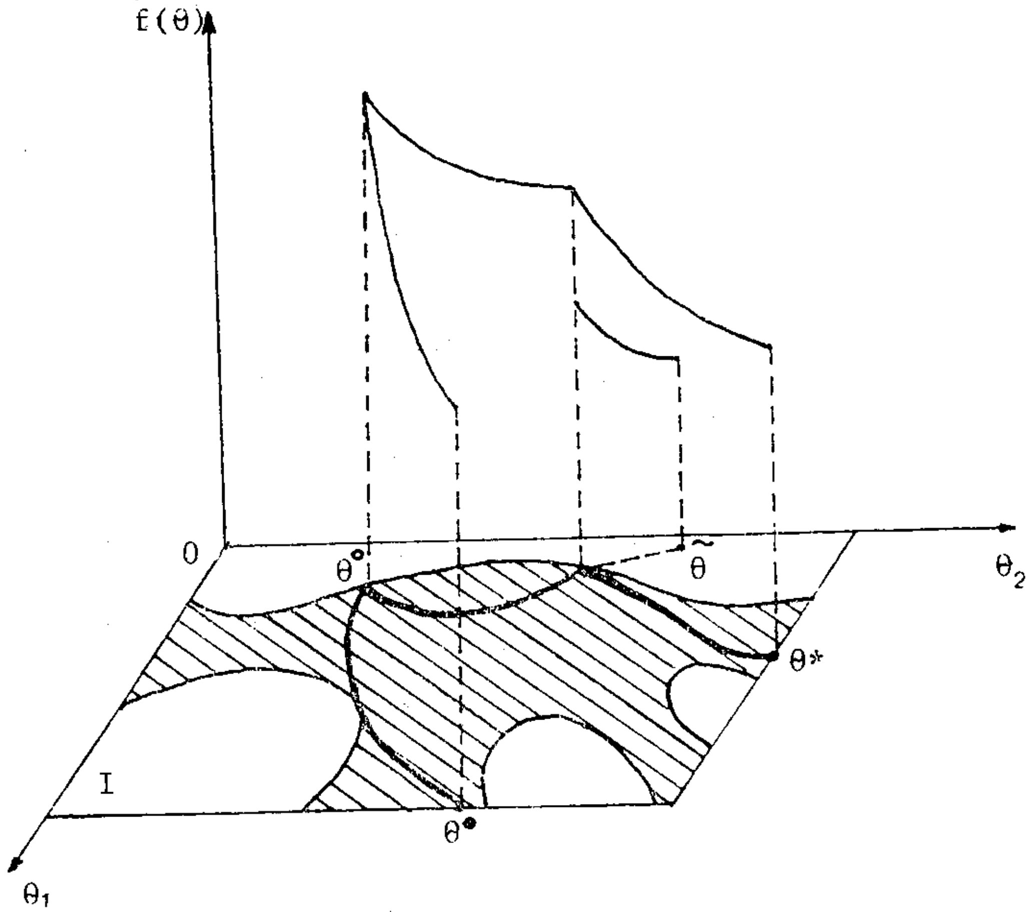
Treća etapa identificira lokalno optimalni ulaz Θ^* — ulaz iz kojeg više nije moguće stabilnim perturbacijama poboljšati vrijednost funkcije optimalne vrijednosti. Karakterizacija lokalno optimalnog ulaza dana je novim uvjetima optimalnosti i predstavlja poopćenje tzv. BBZ (Ben—Israel—Ben—Tal—Zlobec) karakterizacije optimalnosti na konveksne modele MP (ova etapa također je obrađena u drugom dijelu pregleda, gdje se može naći i kratak prikaz rezultata BBZ teorije uvjeta optimalnosti u konveksnom programiranju).

Četvrta etapa odnosi se na određivanje po nekom dodatnom kriteriju (npr. minimalnih troškova, najkraćeg puta itd.) optimalne stabilne putanje od početnog do optimalnog ulaza. Ovaj problem rješava se računom varijacija s pomičnim granicama Θ° ili Θ^*.

Lokalni karakter optimalnog ulaza posljedica je, s jedne strane, insistiranja na stabilnim perturbacijama modela (globalno optimalni ulaz ne mora uvijek biti dostižan takvim perturbiranjem modela) te, s druge strane, tzv. fenomena bifurkacije, odnosno grananja, područja stabilnosti. Naime, moguće su situacije, uzrokovane unutrašnjom strukturom modela, u kojima postoje stabilne putanje koje iz istog stanja vode u različita područja parametarskog prostora s pripadnim, međusobno različitim lokalno optimalnim ulazima i optimalnim vrijednostima programa. (Ovakva situacija moguća je i u linearnim modelima!). Jedna takva situacija u dvodimenzionalnom parametarskom prostoru prikazana je na slici 6.1 (na str. 374).

Globalno područje stabilnosti prikazano je iscrtanom površinom. Θ^* i $\Theta^\bullet$ su dva različita lokalno optimalna ulaza. Globalno optimalan ulaz $\tilde{\Theta}$ nije moguće dostići (iz ovog polaznog stanja Θ°) pomoću stabilnih perturbacija.

Već iz date slike uočljive su dvije osnovne »smetnje« koje ograničavaju efekte optimalizacije modela matematičkog programiranja: determinirani početni ulaz i zahtjev za neprekinutim promjenama izlaza. Ta dva ograničenja vežu primjenu optimalizacije modela MP uz takve realne sisteme kod kojih je početno stanje već postojeća nužnost i nije ga moguće proizvoljno odabrati, a promjene tog stanja treba provoditi »obazrivo«, izbjegavajući radikalne efekte. U takve sisteme ubrajaju se gotovo svi realni, a posebno ekonomski sistemi — od mikroekonomskih subjekata s danim proizvodnim kapacitetima i nemogućnošću brze i bezbolne prilagodbe naglim promjenama proizvodnog programa,



Slika 6.1

do makroekonomskih sistema kakvi su planiranje ili ekonomska politika. U svakom slučaju, optimalizacija modela matematičkog programiranja daje dragocjene informacije u odlučivanju jer omogućava usporedbu »troška« sistema uslijed globalno suboptimalnog ostvarivanja cilja i »žrtava« koje bi sistem (i njegova okolina) morao podnijeti dostižući globalno optimalno stanje. Nadalje, optimalizacija modela MP primjenjiva je i u ekonomsko-teorijskim modelima gdje je zahtjev za neprekinutim promjenama logičan nastavak općeprihvaćenog mišljenja da »unutrašnja struktura ponašanja upravljačkih i ekonomskih sistema generira u osnovi neprekinute procese« (tzv. princip kontinuiteta, vidjeti [22]), koji su (po jednom mišljenju) samo ponekad poremećeni izravnim ekonomsko-političkim akcijama, odnosno (po drugom mišljenju), konstantno ometani eksternim, najčešće slučajnim perturbacijama sistema. *Konačno, primjenom rezultata stabilne optimalizacije na matematičko programiranje, dolazi se do bitno novih informacija o matematičkim programima, npr. do kvalitativno novog pojma i uvjeta optimalnosti (tzv. »strukturni optimum«, vidjeti npr. [15], [23] ili drugi dio ovog pregleda).*

4. PODRUČJA STABILNOSTI

4.1. *Stabilnost modela matematičkog programiranja*

Za neki matematički program (realizaciju modela MP) kaže se da je »dobro postavljen« (u Hadamardovom smislu) ako ima jedinstveno optimalno rješenje i ako je ovisnost tog rješenja o promjenama podataka neprekinuta, tj. ako je model MP u toj realizaciji stabilan. Dok prvi zahtjev ne predstavlja značajnu poteškoću (lako ga je zadovoljiti tzv. Tihonovljevom regularizacijom, vidjeti npr. [19], [27])[9] problem stabilnosti znatno je ozbiljniji. Naime, mogućnost perturbacija vektora polaznih podataka $\Theta = \Theta^{\circ}$ može dovesti do suočavanja s nizom neprilika. Na primjer:

— moguće su situacije u kojima svaka perturbacija vektora podataka Θ iz Θ° uzrokuje skokove u optimalnoj vrijednosti funkcije cilja i/ili skupu dopustivih i optimalnih rješenja (čak i kada je (K, Θ) linearan model),

— može se dogoditi da, ako je skup optimalnih rješenja $\tilde{F}(\Theta^{\circ})$ neprazan skup i Slaterov uvjet zadovoljen za (K, Θ°), svaka perturbacija Θ iz Θ° dovodi do praznog skupa optimalnih rješenja (čak i za linearne modele),

— za svaku perturbaciju Θ iz Θ°, skup optimalnih rješenja može biti neprazan ali neomeđen kada $\Theta \to \Theta^{\circ}$ (što je također moguće i za linearne modele, odnosno modele koji zadovoljavaju Slaterov uvjet za $\Theta = \Theta^{\circ}$),

— konvergencija $\Theta^{k} \to \Theta^{\circ}$ u općem slučaju ne implicira konvergenciju $\tilde{f}(\Theta^{k}) \to \tilde{f}(\Theta^{\circ})$, čak ni za konveksan model s nepraznom unutrašnjošću skupa dopustivih rješenja za $\Theta = \Theta^{\circ}$,

— uniformna konvergencija niza funkcija ograničenja u općem slučaju ne implicira konvergenciju pridruženog niza dopustivih skupova.

Slijedećih nekoliko primjera ilustriraju navedene tvrdnje:

Primjer 4.1

Promatraju se slijedeći linearni modeli:

a)

$$\min(-x_1)$$

p. o.

$$x_1 + \Theta x_2 \leq 1,$$

$$\Theta \in R,$$

[9] U kontekstu optimalizacije modela MP ne postavlja se zahtjev za jedinstvenim optimalnim rješenjem već se, naprotiv, skup optimalnih rješenja tretira kao jedan od elemenata izlaza modela čije se ponašanje analizira.

b)

$$\min(-x_1)$$

p. o.

$$x_1 + \Theta x_2 \le 0,$$
$$x_1 \qquad \le 1,$$
$$\Theta \in R,$$

oko početnog stanja $\Theta^\circ = 0$. U prvom modelu skup optimalnih rješenja u polaznom stanju je pravac $x_1 = 1$ tj. $\tilde{F}(\Theta^\circ) = \{(1, x_2)^T\}$, dok je za $\Theta \neq \Theta^\circ$ skup optimalnih rješenja prazan skup. U drugom modelu, za svako $\Theta \neq \Theta^\circ$, optimalno rješenje je $\tilde{x}(\Theta) = \left(1, -\frac{1}{\Theta}\right)^T$. Međutim, kada $\Theta \to \Theta^\circ$, $\tilde{F}(\Theta)$ nema graničnu točku. (Treba primijetiti da je u oba modela Slaterov uvjet zadovoljen za svako $\Theta \in R$.)

Primjer 4.2

Promatra se konveksan model s jednim ograničenjem:

$$f^1(x, \Theta) = \Theta^2 x \le 0,$$
$$\Theta \in R,$$

u početnom stanju $\Theta = 0$. Kada $\Theta \to \Theta^\circ$, $f^1(x, \Theta) \to 0$ uniformno na bilo kojem konačnom intervalu. Međutim, $F(\Theta) \not\to F(\Theta^\circ)$.

Neprihvatljivost ovakvih situacija u kontekstu optimalizacije modela matematičkog programiranja je očigledna.

Problem stabilnosti, odnosno njenog definiranja i karakterizacije, često je tretiran u literaturi, posebno za specifične modele MP u kojima se perturbiraju samo koeficijenti s desne strane ograničenja (tzv. RHS perturbacije, vidjeti npr. [09]).

(Za detaljnije informacije o ovim i drugim rezultatima vezanim uz karakterizaciju stabilnosti modela MP treba pogledati npr. [10].)

Već je rečeno da optimalizacija modela matematičkog programiranja ne karakterizira stabilnost modela (K, Θ) već traži područja parametarskog prostora unutar kojih je model stabilan. Stabilnost konveksnih modela (K, Θ) u ovom kontekstu podrazumijeva neprekinutost promjena čitavog izlaza modela uslijed promjena vektora parametara, tj. neprekinutost preslikavanja $F\colon \Theta \to F(\Theta)$, $\tilde{F}\colon \Theta \to \tilde{F}(\Theta)$ te funkcije $\tilde{f}(\Theta)$. Međutim, za modele s realističnim funkcijama cilja, moguće je prikazati slijedeće:

Teorema 4.1

Promatra se konveksni model (K, Θ) oko nekog $\Theta^\circ \in I$. Slijedeće tri tvrdnje su ekvivalentne:

(i) višeznačno preslikavanje $F: \Theta \to F(\Theta)$ je poluneprekinuto odozdo u Θ°;

(ii) za svaku realističnu funkciju cilja $f^\circ(x, \Theta)$ postoji okolina $N(\Theta^\circ)$ od Θ° takva da vrijedi:

a) $\tilde{F}(\Theta) \neq \emptyset$ za svako $\Theta \in N(\Theta^\circ) \cap I$ i

b) $\Theta \in N(\Theta^\circ) \cap I$, $\Theta \to \Theta^\circ$ implicira da je niz $\tilde{x}(\Theta)$ omeđen i sve njegove granične točke leže u $\tilde{F}(\Theta^\circ)$;

(iii) za svaku realističnu funkciju cilja $f^\circ(x, \Theta)$ postoji okolina $N(\Theta^\circ)$ od Θ° takva da vrijedi:

a) $\tilde{F}(\Theta) \neq \Theta$ za svako $\Theta \in N(\Theta^\circ) \cap I$ i

b) $\Theta \in N(\Theta^\circ) \cap I$, $\Theta \to \Theta^\circ$ implicira da $\tilde{f}(\Theta) \to \tilde{f}(\Theta^\circ)$.

Dokaz (preuzet iz [15]):

(i) $\Rightarrow$ (ii α). Odaberimo proizvoljno fiksno $x^\circ \in \tilde{F}(\Theta^\circ)$ i zatvorenu kuglu $K \subset R$ takvu da je $x^\circ \in K$ i da je

$$\partial K \cap \tilde{F}(\Theta^\circ) = \emptyset. \tag{4.1}$$

(∂K je omotač od K.) Za dani niz $\Theta^k \to \Theta^\circ$, $\Theta^k \in N(\Theta^\circ)$ postoji niz $\{x(\Theta^k)\} \to x^\circ$, $x(\Theta^k \in F(\Theta^k)$ (zbog poluneprekinutosti odozdo preslikavanja F).

Ovaj dio teorema dokazuje se kontradikcijom. Pretpostavimo stoga da je $\tilde{F}(\Theta^k) = \emptyset$, $\Theta^k \in N(\Theta^\circ)$. To znači da je $F(\Theta^k)$ neomeđen i da (zbog konveksnosti funkcija) za svako $x(\Theta^k)$ postoji smjer opadanja od f° d^k takav da je $y(\Theta^k) = x(\Theta^k) + \alpha_k d^k \in F(\Theta^k)$ za svako $\alpha_k > 0$. Izaberimo $y(\Theta^k) \in \partial K$, $\Theta^k \in N(\Theta^\circ)$. Tada je (zbog kompaktnosti ∂K) niz $\{y(\Theta^k)\}$ omeđen i njegov konvergentan podniz teži u

$$y^\circ \in F(\Theta^\circ) \backslash \tilde{F}(\Theta^\circ) \tag{4.2}$$

(zbog neprekinutosti preslikavanja F i zbog (4.1))

Zbog karatkera smjera d^k vrijedi

$$f^\circ(y(\Theta^k), \Theta^k) \leq f^\circ(x(\Theta^k), \Theta^k), \tag{4.3}$$

odnosno, zbog kontinuiranosti,

$$f^\circ(y^\circ, \Theta^\circ) \leq f^\circ(x^\circ, \Theta^\circ), \tag{4.4}$$

što, zajedno s (4.2), daje kontradikciju.

(i) $\Rightarrow$ *(ii) b) Gornjim dokazom, u stvari, je dokazano i da je niz* $\{x(\Theta^k)\}$ *omeđen (u protivnom, postojali bi* $\Theta^k \to \Theta^\circ$ *i* $x(\Theta^k) \in \tilde{F}(\Theta^k)$, $x(\Theta^k) \not\subseteq K$, *takvi da je*

$$f^\circ(x(\Theta^k), \Theta^k) \leq f^\circ(z, \Theta^k) \ \forall z \in K, \tag{4.5}$$

što vodi u kontradikciju.

Treba još dokazati da sve granične točke niza $\tilde{x}(\Theta^k)$ *leže u* $\tilde{F}(\Theta^\circ)$. *Odaberimo neku graničnu točku* $\overline{x}$ *niza* $\tilde{x}(\Theta^k) \in \tilde{F}(\Theta^k)$ *(zbog neprekinutosti* F, $\overline{x} \in F(\Theta^\circ)$*). Tada postoji podniz* $\Theta^{k(l)} \to \Theta^\circ$ *takav da* $\tilde{x}(\Theta^{k(l)}) \to \overline{x}$ *za* $l \to \infty$.

Uzmimo sada neko optimalno rješenje $x^* \in \tilde{F}(\Theta^\circ)$. *Tada je*

$$f^\circ(x^*, \Theta^\circ) \leq f^\circ(\overline{x}, \Theta^\circ). \tag{4.6}$$

Zbog poluneprekinutosti odozdo preslikavanja F postoji niz $\hat{x}(\Theta^{k(l)}) \in F(\Theta^{k(l)})$ *takav da* $\hat{x}(\Theta^{k(l)}) \to x^*$ *za* $\Theta^{(l)} \to \Theta^\circ$. *Sada je*

$$f^\circ(\tilde{x}(\Theta^{k(l)}), \Theta^{k(l)}) \leq f^\circ(\hat{x}(\Theta^{k(l)}), \Theta^{k(l)}) \tag{4.7}$$

te, zbog neprekinutosti f°,

$$f^\circ(\overline{x}, \Theta^\circ) \leq f^\circ(x^*, \Theta^\circ) \tag{4.8}$$

što zajedno s (4.6), daje

$$f^\circ(\overline{x}, \Theta^\circ) = f^\circ(x^*, \Theta^\circ), \tag{4.9}$$

odnosno $\overline{x} \in \tilde{F}(\Theta^\circ)$.

(ii) $\Rightarrow$ *(iii) Ova implikacija je očigledna. Ako svaka granična točka niza* $\{\tilde{x}(\Theta)\}$ *leži u* $\tilde{F}(\Theta^\circ)$ *tj.* $\tilde{x}(\Theta) \to \tilde{x}(\Theta^\circ)$ *za* $\Theta \to \Theta^\circ$, $\Theta \in N(\Theta^\circ)$ *tada, zbog neprekinutosti* f°, $f^\circ(\tilde{x}(\Theta), \Theta) \to f^\circ(x(\Theta^\circ), \Theta^\circ)$ *tj.* $\tilde{f}(\Theta) \to \tilde{f}(\Theta^\circ)$.

(iii) $\Rightarrow$ *(i) Ova implikacija također se dokazuje kontradikcijom. Pretpostavimo da F nije poluneprekinuto odozdo. Tada postoji otvoreni skup A takav da je* $A \cap F(\Theta^\circ) \neq \emptyset$ *ali* $A \cap F(\Theta^k) = \emptyset$ *za neko* $\Theta^k \to \Theta^\circ$. *Odaberimo* $x^\circ \in A \cap F(\Theta^\circ)$ *i otvorenu kuglu* $B(x^\circ, \delta)$ *takvu da je* $B(x^\circ, \delta) \cap F(\Theta^k) = \emptyset$ $(\Theta^k \to \Theta^\circ)$. *Odaberimo zatim realističnu funkciju cilja*

$f^{\circ}(x,\Theta) = \| x - x^{\circ} \|$ na $x \in F(\Theta)$. Očigledno je $\tilde{f}(\Theta^{\circ}) = 0$ budući da je $x^{\circ} \in F(\Theta^{\circ})$. Međutim, zbog $x^{\circ} \notin F(\Theta^k)$, slijedi $f^{\circ}(z^k,\Theta^k) = \| z^k - x^{\circ} \| \geq \varepsilon$ za neko fiksno $\varepsilon > 0$ i svako $z^k \in F(\Theta^k)$. Odavde slijedi $\tilde{f}(\Theta^k) \not\to \tilde{f}(\Theta^{\circ})$ što daje kontradikciju.

Teorem 4.1 govori o ekvivalenciji poluneprekinutosti odozdo preslikavanja F, poluneprekinutosti odozgo preslikavanja $\tilde{F}$ i neprekinutosti funkcije $\tilde{f}$ (ukoliko funkcija cilja modela (K,Θ) zadovoljava pretpostavku realističnosti). Prema tome, ovaj teorem omogućava analizu stabilnosti modela (K,Θ) samo na temelju ponašanja dopustivog skupa, odnosno ispitivanja neprekinutosti preslikavanja F. U stvari, obzirom da je, zbog neprekinutosti funkcija f^i, $i \in \{0\} \cup P$, konveksnog modela (K,Θ), ovo preslikavanje uvijek poluneprekinuto odozgo,[10] za stabilnost modela (K,Θ) dovoljno je osigurati poluneprekinutost odozdo preslikavanja F. Valja uočiti da tvrdnja (ii)b) u teoremu 4.1 ne implicira da je $\tilde{F}(\Theta^{\circ})$ granični skup niza skupova $\{\tilde{F}(\Theta)\}$ kada $\Theta \to \Theta^{\circ}$, već da on *sadrži* taj granični skup. Slijedeći primjer to *ilustrira:*

Primjer 4.3

Promatra se slijedeći konveksni model:

$$\min f^{\circ}(x,\Theta) = -\Theta^2 x$$

p. o.

$$f^1(x,\Theta) = -\Theta^2 + x \leq 0,$$
$$f^2(x) = -x - 1 \leq 0,$$
$$\Theta \in \mathbf{R},$$

u početnom stanju $\Theta^{\circ} = 0$. Ovdje je

$$\tilde{F}(\Theta^{\circ}) = \begin{cases} [-1, 0] & \text{za } \Theta = 0 \\ \Theta^2 & \text{za } \Theta \neq 0 \end{cases},$$

dok je granična točka niza $\{\tilde{x}(\Theta)\}$ kada $\Theta \to \Theta^{\circ}$ jednaka nuli, što je samo elemenat skupa $\tilde{F}(\Theta^{\circ})$ a ne čitav taj skup.

Naravno, $\tilde{F}(\Theta^{\circ})$ je granični skup niza skupova $\{\tilde{F}(\Theta)\}$, $\Theta \to \Theta^{\circ}$, ukoliko je optimalno rješenje jedinstveno za svako $\Theta \in N(\Theta^{\circ})$.

---

[10] Za dani niz $\Theta^k \to \Theta^{\circ}$, $x^k \in F(\Theta^k)$ znači da za svako k vrijedi:

$$f^i(x^k,\Theta^k) \leq 0, \quad i \in P$$

Tada $x^k \to x^{\circ}$ (zbog neprekinutosti funkcija f^i, $i \in P$) implicira:

$$f^i(x^{\circ},\Theta^{\circ}) \leq 0, \quad i \in P,$$

odnosno $x^{\circ} \in F(\Theta^{\circ})$.

4.2. *Definicija područja stabilnosti*

Imajući u vidu teorem 4.1 iz prethodnog odjeljka te činjenicu da optimalizacija konveksnih modela MP uvijek barata samo s modelima s realističnom funkcijom cilja (u početnom stanju), moguća je slijedeća definicija područja stabilnosti kao područja parametarskog prostora unutar kojih neprekinuta promjena ulaza lokalno generira neprekinutu promjenu dopustivog skupa, skupa optimalnih rješenja i funkcije optimalne vrijednosti.

Definicija 4.1

Promatra se konveksni model (K, Θ) *s realističnom funkcijom cilja u početnom stanju* $\Theta = \Theta^{\circ} \in I$. *Skup* $S(\Theta^{\circ}) \subseteq I \subseteq R^{p}$ *naziva se područje stabilnosti modela* (K, Θ) *u* $\Theta^{\circ} \in S(\Theta^{\circ})$ *ako, za svaki otvoreni skup* $A \subseteq R^{n}$ *koji zadovoljava*

$$A \cap F(\Theta^{\circ}) \neq \Theta,$$

postoji okolina $N(\Theta^{\circ})$ *od* Θ° *takva da je*

$$A \cap F(\Theta) \neq \emptyset$$

za svako $\Theta \in N(\Theta^{\circ}) \cap S(\Theta^{\circ})$.

Za model (K, Θ) kaže se da je stabilan na području $S(\Theta^{\circ})$ u Θ° ako $S(\Theta^{\circ})$ zadovoljava definiciju 4.1. Ukoliko je moguće specificirati $S(\Theta^{\circ}) = N(\Theta^{\circ})$, kaže se da je model (K, Θ) stabilan u Θ°.

Bitna karakteristika ove definicije je da ona pojam područja stabilnosti definira neovisno od funkcije cilja modela (K, Θ) (jedini uvjet je da je funkcija cilja realistična u Θ°), što znači da su područja koja zadovoljavaju ovu definiciju zajednička područja stabilnosti za sve konveksne modele (K, Θ) s realističnim funkcijama cilja.

Također, treba spomenuti da je izlaz modela MP „neprekinut" na području stabilnosti samo lokalno a ne nužno globalno. Međutim, na nekim područjima stabilnosti (npr. $M(\Theta^{\circ})$, $V(\Theta^{\circ})$ i dr. — vidjeti u nastavku poglavlja) često puta je lako odrediti globalnu neprekinutost.

Već je naglašeno da je osnovni značaj pristupa stabilnosti modela MP preko područja stabilnosti u *mogućnosti njihova izračunavanja*, što omogućava stabilno perturbiranje i takvih modela za koje se ne zna da li su u početnom stanju $\Theta = \Theta^{\circ}$ lokalno stabilni na čitavoj okolini od Θ° Izračunavanje, tj. konstrukcija područja stabilnosti, moguće je korištenjem nekih kategorija za koje su razrađene metode njihova izračunavanja (za sve konveksne modele od praktičnog značaja, vidjeti u 5. poglavlju) a to su $P^{=}(\Theta)$, minimalni skup indeksa aktivnih ograničenja i njemu pripadni skup $F^{=}(\Theta)$. Za neko fiksno Θ ovi skupovi definirani su na slijedeći način

$$P^{=}(\Theta) = \{i \in P : x \in F(\Theta) \Rightarrow f^{i}(x, \Theta) = 0\}, \tag{4.10}$$

$$F^{=}(\Theta) = \{x \in R^{n} : f^{i}(x, \Theta) = 0, \quad i \in P^{=}(\Theta)\}. \tag{4.11}$$

Ovi pojmovi već su uvedeni u 2. poglavlju ovog rada, u kontekstu teorije uvjeta optimalnosti konveksnih programa, a ovdje im je notacija prilagođena modelima matematičkog programiranja.

Značaj ovih kategorija u određivanju područja stabilnosti vidljiv je već iz slijedećeg teorema.

4.3. *Nužan uvjet stabilnosti perturbacija*

Teorem 4.2

Promatra se konveksni model (K, Θ) s realističnom funkcijom cilja u nekom $\Theta = \Theta^{\circ}$. Neka je $S(\Theta^{\circ})$ područje stabilnosti modela (K, Θ) u Θ°. Tada postoji okolina $N(\Theta^{\circ})$ od Θ° takva da je

$$P^{=}(\Theta) \subseteq P^{=}(\Theta^{\circ})$$

za svako $\Theta \in N(\Theta^{\circ}) \cap S(\Theta^{\circ})$.

Dokaz:

Poluneprekinutost odozdo preslikavanja F na $S(\Theta^{\circ})$ u Θ° osigurava da postoji okolina $N(\Theta^{\circ})$ od Θ° takva da za svako $x^{\circ} \in F(\Theta^{\circ})$ i $\Theta \in N(\Theta^{\circ}) \cap S(\Theta^{\circ})$, kada $\Theta \to \Theta^{\circ}$, postoji niz $\{x(\Theta)\}$ takav da je $x(\Theta) \in F(\Theta)$ i $x(\Theta) \to x^{\circ}$. Sada, zbog neprekinutosti funkcija ograničenja (po x i po Θ), $f^{i}(x, \Theta) = 0$ za svako $x \in F(\Theta)$, $\Theta \in N(\Theta^{\circ}) \cap S(\Theta^{\circ})$ implicira $f^{i}(x^{\circ}, \Theta^{\circ}) = 0$ za svako $x^{\circ} \in F(\Theta^{\circ})$, odnosno:

$$i \in P^{=}(\Theta),\ \Theta \in N(\Theta^{\circ}) \cap S(\Theta^{\circ}) \Rightarrow i \in P^{=}(\Theta^{\circ}).$$

Napomena: dokaz teorema 4.2 za neka konkretna područja stabilnosti može se naći u [17], [19], a u ovom obliku preuzet je iz [15]. Nužan uvjet stabilnih perturbacija ilustriran je slijedećim primjerom (preuzetim iz [25]):

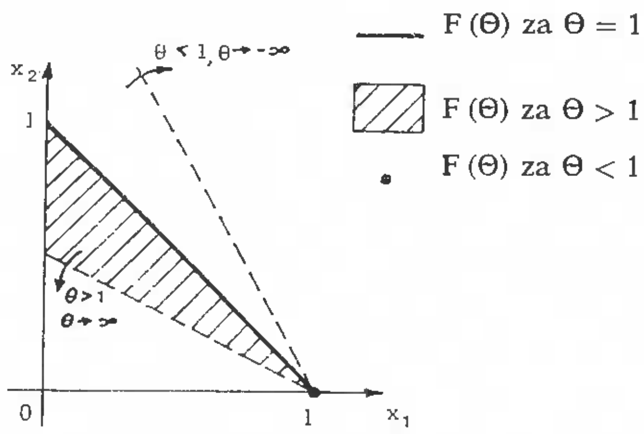
Primjer 4.4

Promatra se slijedeći linearni model:

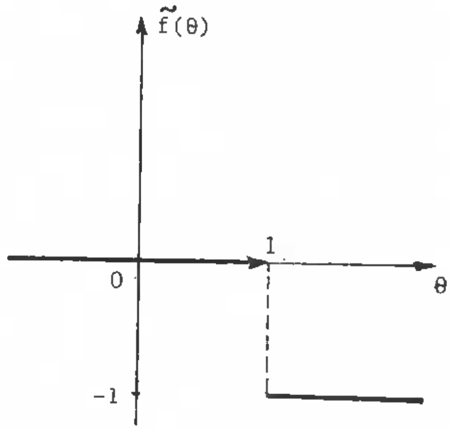
$$\min f^{\circ}(x) = -x_2$$

$$\begin{aligned}
p.\,o.\quad & \\
f^{1}(x) &= x_1 + x_2 - 1 \le 0 \\
f^{2}(x,\Theta) &= -x_1 - \Theta x_2 + 1 \le 0, \\
f^{3}(x) &= -x_1 \le 0, \\
f^{4}(x) &= -x_2 \le 0,
\end{aligned}$$

u početnom stanju $\Theta = \Theta^{\circ} = 1$. Ponašanje dopustivog skupa i funkcije optimalne vrijednosti prilikom perturbacija modela iz početnog stanja prikazano je na slici 4.1, a) i b):



Slika 4.1a)



Slika 4.1b)

Iz gornje dvije slike vidljivo je da se za perturbacije modela iz $\Theta = \Theta^{\circ}$ za $\Theta > 1$ izlaz mijenja neprekinuto, tj. da su te perturbacije stabilne. Međutim, perturbacije za $\Theta < 1$ dovode do kontrakcije dopustivog skupa na jednu točku ($F(\Theta) = \{(1,0)^T\}$) te da funkcija optimalne vrijednosti pri tim perturbacijama doživljava skokovitu promjenu. Prema tome, ove perturbacije nisu stabilne. Zaista, obzirom da je

$$P^{=}(\Theta) = \begin{cases} \{1,2\} & \text{za } \Theta = 1 \\ \emptyset & \text{za } \Theta > 1\,, \\ \{1,2,4\} & \text{za } \Theta < 1 \end{cases}$$

$P^{=}(\Theta) \subseteq P^{=}(\Theta^{\circ})$ vrijedi za $\Theta > 1$, ali ne i za $\Theta < 1$, čime teorem 4.2 potvrđuje da su stabilne perturbacije oko $\Theta^{\circ} = 1$ samo pozitivne perturbacije iz $\Theta^{\circ} = 1$.

Teorem 4.2 sugerira mogućnost podjele čitavog područja dopustivih vrijednosti ulaznih podataka I prema stupnju njihove stabilnosti, pri čemu se kao mjera stabilnosti može koristiti kardinalnost skupa $P^{=}(\Theta)$. Dijelovi skupa I za koje model (K, Θ) zadovoljava Slaterov uvjet, tj. za koje vrijedi $P^{=}(\Theta) = \Theta$, su, prema tome, dijelovi s najvišim stupnjem stabilnosti, dok su dijelovi s najvećom kardinalnošću skupa $P^{=}(\Theta)$, područja najnestabilnijih stanja modela (K, Θ). Nadalje, moguće je „ocjenjivati" i stabilnost putanje u I prema ponašanju $p(\Theta) = \text{card}\, P^{=}(\Theta)$ duž nje.

Nužnom uvjetu stabilnih perturbacija moguće je dati i ekonomsku interpretaciju (Vidjeti [17], [22]):

„Stabilni sistemi lokalno uvijek teže ka manje restriktivnom stanju."

Ova interpretacija vodi do fenomena „nestabilnog prisilnog optimuma", tj. situacije u kojoj se, radi očuvanja stabilnosti nekog ekonomskog sistema (za sve realistične ciljeve), sistem ne smije prisiljavati da funkcionira optimalno.

Za ilustraciju, promotrimo primjer iz teorije poduzeća, prikazan u uvodnom dijelu ovog rada (program (TP)), ovdje u nešto izmijenjenom obliku. Naime, pretpostavimo da sistem ograničenja

$$Ax \leq b$$

zadovoljava Slaterov uvjet i da je optimalno rješenje tog problema, recimo x^*. Ako se sistem prisiljava da funkcionira optimalno, tada, uz originalna ograničenja, treba dodati i novo ograničenje:

$$c^T x \geq c^T x^*.$$

Sada je model:

$$\begin{array}{ll} & \text{Max } c^T x \\ p.\,o. & \\ (\text{TP}, \Theta) & Ax \leq b, \\ & c^T x \geq \Theta, \\ & x \geq 0, \end{array}$$

promatran oko početnog stanja $\Theta^\circ = 0$. Početna realizacija ovog modela, tj. $(\text{TP}, \Theta^\circ)$, zaista je ekvivalentna matematičkom programu (TP) jer je dodatno ograničenje zadovoljeno za svako dopustivo rješenje programa (TP) (zbog nenegativnosti varijabli odlučivanja i tržišnih cijena). Obzirom da ograničenja $Ax \leq b$ zadovoljavaju Slaterov uvjet, za početnu realizaciju modela $(\text{TP}, \Theta^\circ)$ vrijedi:

$$P^{=}(\Theta^\circ) = \emptyset.$$

Sada, ako se model perturbira u pozitivnom smjeru, tj. za $\Theta > 0$, do stanja $\Theta' = c^T x^*$, dobiva se realizacija koja opisuje sistem prisiljen da funkcionira optimalno. Međutim, za Θ' vrijedi $P^{=}(\Theta') \neq \emptyset$ (obzirom na činjenicu da je optimalno rješenje linearnog programa uvijek granična točka dopustivog skupa), što znači da ova perturbacija ne zadovoljava nužan uvjet stabilnih perturbacija (teorem 4.2), odnosno da uvođenje dodatne restrikcije u smislu prisiljavanja sistema da funkcionira optimalno, nužno dovodi do njegove nestabilnosti. Zaista, u stanju $\Theta' = c^T x^*$, dolazi do drastične kontrakcije skupa dopustivih rješenja na jednu točku ($F(\Theta') = \{x^*\}$), odnosno na skup optimalnih rješenja, ukoliko ono nije jedinstveno.

Ovaj fenomen također se povezuje i sa cikličkim tendencijama ekonomskih procesa. Naime, ukoliko je ekonomski sistem doveden u optimalno stanje, nakon toga postoje samo dva „prirodna razvoja": ili je sistem već funkcionirao optimalno i bez prisile je doveden u to optimalno stanje (dakle, sistem je dinamički optimalan) iz kojeg će se, po slobodnoj unutrašnjoj inerciji, nastaviti kretati optimalno, ili će se, ako je prisilno doveden u to optimalno stanje polako (neprekinutim promjenama) vraćati u suboptimalno stanje i ciklus će se ponavljati.

Ovi fenomeni vode k alternativnom pristupu optimalizaciji u smislu „relaksirane optimalizacije" (umjesto striktne optimalizacije) koja će osigurati veću stabilnost sistema. (Uz ovaj kontekst vezan je i pojam „strukturnog optimuma", o kojem će biti govora u drugom dijelu pregleda.)

4.4. *Višeznačna preslikavanja* $F^{=} : \Theta \to F^{=}(\Theta)$ *i* $F_0^{=} : \Theta \to F_0^{=}(\Theta)$

4.4.1. Preslikavanje $F^{=} : \Theta \to F^{=}(\Theta)$

Kao što je već ranije rečeno, pri konstrukciji područja stabilnosti, odnosno uvjeta poluneprekinutosti odozdo višeznačnog preslikavanja $F: \Theta \to F(\Theta)$, značajnu ulogu imaju skupovi $P^{=}(\Theta)$ i $F^{=}(\Theta)$. Stoga treba obratiti pažnju i na višeznačno preslikavanje $F^{=}: \Theta \to F^{=}(\Theta)$. Prvo što se može uočiti jest da je nužan uvjet stabilnih perturbacija (teorem 4.2) istovremeno i nužan uvjet poluneprekinutosti odozdo preslikavanja $F^{=}: \Theta \to F^{=}(\Theta)$, što je moguće dokazati analogno dokazu teorema 4.2 uz zamjenu $F(\Theta)$ s $F^{=}(\Theta)$. (Puni dokaz može se naći u [28].) Iz ovoga bi se moglo zaključiti da je i poluneprekinutost odozdo preslikavanja $F^{=}: \Theta \to F^{=}(\Theta)$ nužan uvjet stabilnosti modela. Međutim, to nije točno, što ilustrira slijedeći primjer (preuzet iz [28]):

Primjer 4.5

Promatra se konveksan model sa slijedećim ograničenjima:

$$f^1(x) = -x \le 0,$$
$$f^2(x) = x - 1 \le 0,$$

$$f^3(x,\Theta) = \begin{Bmatrix} 0 & za & |x| \le 1 \\ \Theta\,(|x| - 1) & za & |x| > 1 \end{Bmatrix} \le 0,$$

$$\Theta \in I = [0,1],$$

u početnom stanju $\Theta^* = 0$. Za svako $\Theta \in I$, $P^{=}(\Theta) = \{3\}$ i $F(\Theta) = \{x\colon x \in [0,1]\}$. Budući da skup dopustivih rješenja ne zavisi od Θ, znači da je model stabilan za sve realistične funkcije cilja. Međutim, $F^{=}(\Theta^*) = R$ i $F^{=}(\Theta) = \{x\colon x \in [-1,1]\}$ za svako $\Theta \in I$, $\Theta \ne \Theta^*$. Prema tome, preslikavanje $F^{=}: \Theta \to F^{=}(\Theta)$ nije poluneprekinuto odozdo u $\Theta^* = 0$.

Iz gornjeg primjera vidljivo je da poluneprekinutost odozdo preslikavanja $F: \Theta \to F(\Theta)$ ne implicira poluneprekinutost odozdo preslikavanja $F^{=}: \Theta \to F^{=}(\Theta)$. Također, ne vrijedi ni obrat, što ilustrira slijedeći primjer (također preuzet iz [28]):

Primjer 4.6

Promatra se slijedeći konveksan model:

$$\min f^0(x) = x$$

p. o.

$$f^1(x\Theta) = -x - 1 - \Theta \le 0,$$
$$f^2(x,\Theta) = -\Theta^2 x \le 0,$$

$$\Theta \in [-1,1],$$

u početnom stanju $\Theta^\circ = 0$. Ovdje je $P^=(\Theta^\circ) = \{2\}$ i $F^=(\Theta^\circ) = R$, dok je za $\Theta \in I$, $\Theta \neq \Theta^\circ$, $P^=(\Theta) = \emptyset$ i $F^=(\Theta) = R$. Iako je preslikavanje $F^= : \Theta \to F^=(\Theta)$ poluneprekinuto odozdo u Θ° (ono je u stvari neprekinuto u Θ°), model nije stabilan jer je

$$F(\Theta) = \begin{cases} [-1, \infty) & za \quad \Theta = 0 \\ [\;0, \infty) & za \quad \Theta \neq 0 \end{cases},$$

odnosno, preslikavanje $F: \Theta \to F(\Theta)$ nije poluneprekinuto odozdo u Θ°.

Dakle, na temelju gornja dva primjera moglo bi se zaključiti da preslikavanje $F^=: \Theta \to F^=(\Theta)$ nije povezano s problemom stabilnosti modela (K, Θ). Međutim, upravo povezivanje svojstava preslikavanja $F: \Theta \to F(\Theta)$ i $F^= : \Theta \to F^=(\Theta)$, odnosno određivanje uvjeta pod kojima poluneprekinutost preslikavanja $F^=: \Theta \to F^=(\Theta)$ implicira isto svojstvo preslikavanja $F: \Theta \to F(\Theta)$, omogućilo je konstrukciju novih područja stabilnosti, o čemu će biti govora u slijedećem odjeljku.

Na kraju, treba primijetiti da, suprotno preslikavanju $F: \Theta \to F(\Theta)$, pretpostavka neprekinutosti (po x i po Θ) funkcija modela (K, Θ) ne osigurava poluneprekinutost odozgo preslikavanja $F^= : \Theta \to F^=(\Theta)$. Međutim, ukoliko je (uz tu pretpostavku) i skup $P^=(\Theta)$ konstantan za svako Θ iz okoline od nekog Θ°, preslikavanje $F^= : \Theta \to F^=(\Theta) \cap K$ jest poluneprekinuto odozgo u Θ° za proizvoljan kompakt K. (Ovdje je $F^=(\Theta)$ presječen s K da bi se izbjegla neograničenost skupa $F^=(\Theta)$ za neko Θ iz okoline od Θ°.) (Dokaz ove tvrdnje može se naći u [28].)

4.4.2. Preslikavanje $F_0^= : \Theta \to F_0^=(\Theta)$

Još jedno preslikavanje značajno je u optimalizaciji konveksnih modela matematičkog programiranja. To je višeznačno preslikavanje $F_0^=: \Theta \to F_0^=(\Theta)$,[11] za neko fiksno $\Theta = \Theta^\circ$ definirano na slijedeći način:

$$F_0^=(\Theta) = \{x \in R^n : f^i(x, \Theta) \leq 0, \quad i \in P^=(\Theta^\circ)\}. \tag{4.12}$$

Ovo preslikavanje ima ključnu ulogu, kako u kontekstu analize stabilnosti modela (najšire do sada poznato područje stabilnosti konstruira se upravo pomoću ovog preslikavanja), tako i pri karakterizaciji optimalnosti (potpuna karakterizacija optimalnosti ulaza modela (K, Θ) bez ikakvih uvjeta na njegovu strukturu, moguća je uz korištenje ovog preslikavanja).

Kao i preslikavanje $F: \Theta \to F(\Theta)$ (ali ne i $F^=: \Theta \to F^=(\Theta)$), ovo preslikavanje je uvijek poluneprekinuto odozgo (zbog neprekinutosti

[11] Donji indeks u ovoj notaciji koristi se kao indikacija da je ovo preslikavanje povezano s karakteristikama modela u stanju $\Theta = \Theta^\circ$ (točnije, s $P^=(\Theta^\circ)$). Ukoliko se fiksni ulaz označi drugačije, analogno treba mijenjati i ovu oznaku (npr. u kontekstu karakterizacije optimalnosti, fiksni ulaz označava se s Θ^* pa se i ovo preslikavanje označava s $F_*^=(\Theta)$).

funkcija $f^i(x, \Theta)$, $i \in P^=(\Theta^\circ)$). Međutim, ono nije uvijek i poluneprekinuto odozdo (kao ni $F: \Theta \to F(\Theta)$). U stvari, poluneprekinutost odozdo preslikavanja $F_0^=: \Theta \to F_0^=(\Theta)$ je dovoljan uvjet stabilnih perturbacija jer ono implicira poluneprekinutost odozdo preslikavanja $F: \Theta \to F(\Theta)$. Da ovo svojstvo nije i nužan uvjet stabilnih perturbacija, pokazuje slijedeći primjer:

Primjer 4.7

Promatra se konveksan model sa slijedećim ograničenjima:

$$f^1(x) = x \leq 0,$$

$$f^2(x, \Theta) = \Theta x \leq 0,$$

$$\Theta \in I = (0, \infty),$$

u početnom stanju $\Theta^\circ = 0$. Ovdje je $F(\Theta) = R_-$ (nepozitivan ortant od R) za svako $\Theta \in I$, što znači da je model stabilan za sve perturbacije unutar I (tj. za $\Theta > 0$). Međutim, kako je $P^=(\Theta^\circ) = \{2\}$, to je

$$F_0^=(\Theta) = \begin{cases} R & za \ \Theta = 0 \\ R_- & za \ \Theta > 0 \end{cases}.$$

Dakle, preslikavanje $F_0^=: \Theta \to F_0^=(\Theta)$ nije poluneprekinuto odozgo u Θ° iako je model stabilan u Θ° za svako $\Theta \in I$.

Suprotno preslikavanju $F^= : \Theta \to F^=(\Theta)$, svojstva preslikavanja $F_0^= : \Theta \to F_0^=(\Theta)$ nije moguće povezati s nužnim uvjetom stabilnih perturbacija (teorem 4.2) jer je ono definirano samo pomoću $P^=(\Theta^\circ)$ i ne ovisi o ponašanju skupa $P^=(\Theta)$ pri perturbiranju modela. Međutim, svojstvo $P^=(\Theta) \subseteq P^=(\Theta^\circ)$ stabilnih perturbacija omogućava uspostavljanje slijedećeg odnosa:

$$F(\Theta) \subseteq F_0^=(\Theta) \subseteq F^=(\Theta) \tag{4.13}$$

koji vrijedi za svako $\Theta \in N(\Theta^\circ) \cap S(\Theta^\circ)$, gdje je $N(\Theta^\circ)$ neka okolina od Θ° a $S(\Theta^\circ)$ proizvoljno područje stabilnosti u Θ°.

Na kraju, treba spomenuti da je preslikavanje $F_0^=$ izučavano već u [02], gdje je korištena druga notacija.

4.5. *Neka poznata područja stabilnosti*

U ovom odjeljku izložena su neka do sada otkrivena područja stabilnosti modela (K, Θ) u nekom $\Theta = \Theta^\circ$. (Podsjetimo se da su to dovoljni uvjeti za poluneprekinutost odozdo preslikavanja $F: \Theta \to F(\Theta)$ u Θ°.) Ovi uvjeti izraženi su pomoću skupova $P^=(\Theta)$, $F^=(\Theta)$ i $F_0^=(\Theta)$ i predstavljaju zajednička područja stabilnosti za sve konveksne modele (K, Θ) s realističnim funkcijama cilja.

Radi jednostavnosti notacije, u ovom odjeljku pretpostavlja se da je $I = R^p$. (U protivnom, ovdje promatrana područja stabilnosti treba presjeći s I.)

4.5.1. Područje stabilnosti $M(\Theta^\circ)$

Idejno najjednostavnije i intuitivno najjasnije područje stabilnosti u Θ° je skup

$$M(\Theta^\circ) = \{\Theta\colon F(\Theta^\circ) \subseteq F(\Theta)\}, \tag{4.14}$$

dakle, skup svih vektora parametara Θ koji ne smanjuju dopustiv skup (npr. za RHS-perturbirani linearni model to je skup svih RHS-vektora koji po komponentama nisu manji od polaznog RHS-vektora).

Područje stabilnosti $M(\Theta^\circ)$ u općem slučaju nije konveksan skup, što ilustrira slijedeći primjer:

Primjer 4.8

Promatra se konveksan model s jednim ograničenjem:

$$f^1(x,\Theta) = (|\Theta_1| - |\Theta_2|)\,x \leq 0,$$

u $\Theta^\circ = (0,0)^T$. *Ovdje je* $F(\Theta^\circ) = R$, *pa je*

$$M(\Theta^\circ) = \{(\Theta_1,\Theta_2)^T : |\Theta_1| = |\Theta_2|\},$$

dakle, dva pravca koji se sijeku u Θ°.

Međutim, uz određeni uvjet, iskazan slijedećim teoremom (preuzetim iz [27]), područje $M(\Theta^\circ)$ jest lokalno konveksno:

Teorem 4.3

Promatra se konveksan model (K,Θ) *s realističnom funkcijom cilja u* $\Theta = \Theta^\circ$. *Neka postoji okolina* $N(\Theta^\circ)$ *od* Θ° *takva da je skup*

$$N(\Theta^\circ) \cap \{\Theta : f^i(x,\Theta) = 0 \text{ za neko } i \in P\}$$

konveksan za svako $x \in F(\Theta^\circ)$ *i svako* $i \in P$. *Tada je* $M(\Theta^\circ) \cap N(\Theta^\circ)$ *konveksan skup.*

Kao područje stabilnosti, u nekim situacijama, također se promatra i slijedeći podskup od $M(\Theta^\circ)$:

$$M_1(\Theta^\circ) = \{\Theta\colon F(\Theta^\circ) \subseteq F(\Theta) \subseteq F^=(\Theta^\circ)\}. \tag{4.15}$$

4.5.2. Područje stabilnosti $H(\Theta^\circ)$

Za određivanje ovog, najšireg do sada poznatog područja stabilnosti (bez dodatnih pretpostavki na svojstva preslikavanja $F^=\colon \Theta \to F^=(\Theta)$)

koristi se višeznačno preslikavanje $F^{=}_{o}: \Theta \to F^{=}_{o}(\Theta)$, definirano u odjeljku 4.4. Slijedeći rezultat pojavio se u [13]:

Teorem 4.4

Promatra se konveksan model (K, Θ) s realističnom funkcijom cilja u nekom $\Theta = \Theta^{\circ}$. Tada je skup

$$H(\Theta^{\circ}) = \{\Theta: F(\Theta^{\circ}) \subseteq F^{=}_{o}(\Theta)\} \tag{4.16}$$

područje stabilnosti u Θ°.

Napomena: obzirom da je $H(\Theta^{\circ})$ najšire poznato područje stabilnosti, ovdje je u cijelosti izložen dokaz ove tvrdnje (preuzet iz [15]).

Dokaz:

Treba dokazati da je preslikavanje $F: \Theta \to F(\Theta)$ poluneprekinuto odozdo u Θ° na $H(\Theta^{\circ})$. Kada to ne bi bilo točno, postojao bi otvoren skup A takav da je $F(\Theta^{\circ}) \cap A \neq \emptyset$, ali $F(\Theta^{k}) \cap A = \emptyset$ za niz $\Theta^{k} \in H(\Theta^{\circ})$, $\Theta^{k} \to \Theta^{\circ}$.

Izaberimo proizvoljno $\bar{x}$ u relativnoj unutrašnjosti skupa $F(\Theta^{\circ}) \cap A$. Tada je

$$f^{i}(\bar{x}, \Theta^{\circ}) < 0, \ i \in P^{<}(\Theta^{\circ}) \tag{4.17}$$

te, zbog neprekinutosti funkcija,

$$f^{i}(\bar{x}, \Theta^{k}) < 0, i \in P^{<}(\Theta^{\circ}), \tag{4.18}$$

za svako Θ^{k} u nekoj okolini od Θ°. Nadalje, obzirom da je $\bar{x} \in F(\Theta^{\circ})$[12] i $\Theta^{k} \in H(\Theta^{\circ})$, vrijedi:

$$f^{i}(\bar{x}, \Theta^{k}) \leq 0, \ i \in P^{=}(\Theta^{\circ}). \tag{4,19}$$

Izrazi (4.18) i (4.19) daju $\bar{x} \in F(\Theta^{k})$ za svako $\Theta^{k} \in H(\Theta^{\circ})$, dovoljno blizu Θ°, što daje kontradikciju.

Činjenica da je za svako Θ, $F(\Theta) \subseteq F^{=}_{o}(\Theta)$, daje $M(\Theta^{\circ}) \subseteq H(\Theta^{\circ})$, čime gornji dokaz *vrijedi* i za područje $M(\Theta^{\circ})$. (Izravan dokaz da je $M(\Theta^{\circ})$ područje stabilnosti modela (K, Θ) može se naći u [27].)

4.5.3. Područja stabilnosti uz poluneprekinutost odozdo preslikavanja $F^{=}: \Theta \to F^{=}(\Theta)$

U ovom odjeljku navode se uvjeti koji osiguravaju da poluneprekinutost odozdo preslikavanja $F^{=}: \Theta \to F^{=}(\Theta)$ implicira poluneprekinu-

---

[12] Skup $H(\Theta^{\circ})$ može se zapisati i na slijedeći način:
$H(\Theta^{\circ}) = \{\Theta: f^{i}(x, \Theta) \leq 0, \ \forall x \in F(\Theta^{\circ}), i \in P^{=}(\Theta^{\circ})\}$.

tost odozdo preslikavanja F: $\Theta \to F(\Theta)$, tj. stabilnost modela (K, Θ). Ovi uvjeti također se mogu shvatiti kao područja stabilnosti ali samo onih modela (K, Θ) koji zadovoljavaju pretpostavku poluneprekinutosti odozdo preslikavanja $F^{=}: \Theta \to F^{=}(\Theta)$.

Drugi razlog zbog kojeg se navode ovi uvjeti je u tome što područja stabilnosti koja se obrađuju u nastavku ovog poglavlja, u stvari, predstavljaju »sužavanje« ovih područja dodatnim uvjetima koji osiguravaju stabilnost modela bez dodatnih pretpostavki.

Teorem 4.5

Promatra se konveksan model (K, Θ) s realističnom funkcijom cilja u nekom $\Theta = \Theta^{\circ}$. Neka je preslikavanje $F^{=}: \Theta \to F^{=}(\Theta)$ poluneprekinuto odozdo u Θ°. Tada su slijedeći skupovi područja stabilnosti u Θ°:

$$R_1(\Theta^{\circ}) = \{\Theta: P^{=}(\Theta^{\circ}) = P^{=}(\Theta)\}, \tag{4.20}$$

$$R_2(\Theta^{\circ}) = \{\Theta: f^i(x, \Theta) \le 0 \ \forall \ x \in F^{=}(\Theta),\ i \in P^{=}(\Theta^{\circ}) \backslash P^{=}(\Theta)\}, \tag{4.21}$$

$$R_6(\Theta^{\circ}) = \{\Theta: F(\Theta) \subseteq F^{=}(\Theta^{\circ})\} \cap R_1(\Theta^{\circ}). \tag{4.22}$$

Nadalje, neka dopustiv skup $F(\Theta^{\circ})$ ima nepraznu unutrašnjost.[13] Tada su i slijedeći skupovi područja stabilnosti u Θ°:

$$R_3(\Theta^{\circ}) = \{\Theta: f^i(x, \Theta) \le 0 \ \ \forall \ x \in F^{=}(\Theta^{\circ}),\ i \in P^{=}(\Theta^{\circ}) \backslash P^{=}(\Theta^{\circ})\}, \tag{4.23}$$

$$R_4(\Theta^{\circ}) = \{\Theta: f^i(x, \Theta) \le 0 \ \forall \ x \in F(\Theta^{\circ}),\ i \in P^{=}(\Theta^{\circ}) \backslash P^{=}(\Theta^{\circ})\}, \tag{4.24}$$

$$R_5(\Theta^{\circ}) = \{\Theta: F(\Theta) \subseteq F(\Theta^{\circ})\} \cap R_3(\Theta^{\circ}). \tag{4.25}$$

Napomena: obzirom da su neka od navedenih područja ($R_2(\Theta^{\circ})$ i $R_4(\Theta^{\circ})$) općenito neusporediva s $H(\Theta^{\circ})$ (i međusobno) te dokaz teorema 4.4 ne vrijedi i za njih, dokaz ovog teorema (također preuzet iz [15]) navodi se u cijelosti.

Dokaz:

Obzirom da je

$$R_6(\Theta^{\circ}) \subseteq R_1(\Theta^{\circ}) \subseteq R_2(\Theta^{\circ}), \tag{4.26}$$

te da je

$$R_5(\Theta^{\circ}) \subseteq R_3(\Theta^{\circ}) \subseteq R_4(\Theta^{\circ}), \tag{4.27}$$

---

[13] Ova pretpostavka nije ekvivalentna zadovoljenju Slaterovog uvjeta, što pokazuje slijedeći primjer (preuzet iz [14]: Za konveksni program (K) s jednim ograničenjem:

$$f^1(x) = \max\{0, x^2 \operatorname{sgn} x\} \le 0,$$

postoji unutrašnja točka dopustivog skupa $F = \{x: x \le 0\}$, dok Slaterov uvjet nije zadovoljen ($f^1(x) = 0 \ \forall \ x \in F$).

(druga implikacija u (4.27) vrijedi zbog $F(\Theta^\circ) \subseteq F^=(\Theta^\circ)$*), dovoljno je dokazati tvrdnju samo za (1) područje* $R_2(\Theta^\circ)$ *i (2) područje* $R_4(\Theta^\circ)$.

(1) Treba dokazati da je preslikavanje $F: \Theta \to F(\Theta)$ *poluneprekinuto odozdo u* Θ° *na* $R_2(\Theta^\circ)$. *Za dani niz* $\Theta^k \to \Theta^\circ$, $\Theta^k \in R_2(\Theta^\circ)$, *izaberimo proizvoljno* $\bar{x} \in F(\Theta^\circ)$. *Dovoljno je pokazati da postoji niz* $\{x^k(\Theta^k)\}$, $x^k(\Theta^k) \in F(\Theta^k)$ *takvo da* $x^k \to \bar{x}$. *Proizvoljno blizu* $\bar{x}$ *postoji* $\bar{y}$ *u relativnoj unutrašnjosti od* $F(\Theta^\circ)$, *tj.*

$$f^i(\bar{y}, \Theta^\circ) < 0, \quad i \in P^<(\Theta^\circ). \tag{4.28}$$

Evidentno je da je $\bar{y} \in F^=(\Theta^\circ)$ *(zbog neprekinutosti funkcija modela i zbog* $F(\Theta^\circ) \subseteq F^=(\Theta^\circ)$*). Međutim, preslikavanje* $F^=: \Theta \to F^=(\Theta)$ *je po pretpostavci poluneprekinuto odozdo u* Θ°. *Prema tome, postoji (za isti niz* $\{\Theta^k\}$*) niz* $\{y^k(\Theta^k)\}$, $y^k(\Theta^k) \in F^=(\Theta^k)$ *takav da* $y^k \to \bar{y}$. *Također, iz istog razloga, vrijedi:*

$$P^=(\Theta^k) \subseteq P^=(\Theta^\circ), \tag{4.29}$$

za svako k dovoljno veliko. Zbog neprekinutosti funkcija, izraz (4.28) implicira

$$f^i(y^k, \Theta^k) < 0, \quad i \in P^<(\Theta^\circ) \tag{4.30}$$

Također, (4.29) i $\Theta^k \in R_2(\Theta^\circ)$ *daju:*

$$f^i(y^k, \Theta^k) \leq 0, \quad i \in P^<(\Theta^\circ) \setminus P^<(\Theta^k), \tag{4.31}$$

obzirom da je $y^k \in F^=(\Theta^k)$. *Ovo poslijednje, zajedno s (4.30) i (4.31), implicira da je* $y^k \in F(\Theta^k)$ *za dovoljno veliko k. Dakle, za svaku točku* $\bar{y} \in F(\Theta^\circ)$, *proizvoljno blizu* $\bar{x}$, *postoji niz* $y^k \in F(\Theta^k)$ *takav da* $y^k \to \bar{y}$. *Prema tome, slijedi da je moguće konstruirati niz* $x^k \in F(\Theta^k)$ *koji konvergira ka* $\bar{x}$.

(2) Kada preslikavanje $F: \Theta \to F(\Theta)$ *ne bi bilo poluneprekinuto odozdo u* Θ° *na* $R_4(\Theta^\circ)$, *postojao bi otvoren skup A takav da je* $F(\Theta^\circ) \cap A \neq \emptyset$, *ali da je* $F(\Theta^k) \cap A = \emptyset$ *za niz* $\{\Theta^k\}$, $\Theta^k \in R_4(\Theta^\circ)$, $\Theta^k \to \Theta^\circ$. *Izaberimo proizvoljno* $\hat{x}$ *iz unutrašnjosti skupa* $F(\Theta^\circ) \cap A$. *Tada je*

$$f^i(\hat{x}, \Theta^\circ) < 0, \quad i \in P^<(\Theta^\circ), \tag{4.32}$$

što, zbog neprekinutosti funkcija, daje

$$f^i(\hat{x}, \Theta^k) \leq 0, \quad i \in P^<(\Theta^\circ), \tag{4.33}$$

za svako Θ^k *dovoljno blizu* Θ°. *Obzirom da je* $\Theta^k \in R_4(\Theta^\circ)$ *i* $\hat{x} \in F(\Theta^\circ)$, *vrijedi:*

$$f^i(\hat{x}, \Theta) \leq 0, \; i \in P^<(\Theta^\circ)\backslash P^{\underline{<}}(\Theta^k), \tag{4.34}$$

što, zajedno s (4.33), daje

$$f^i(\hat{x}, \Theta) \leq 0, \; i \in P^<(\Theta^k. \tag{4.35}$$

To znači da je $\hat{x} \notin F^=(\Theta^k)$, jer bi u protivnom vrijedilo $\hat{x} \in F(\Theta^k)$ što je kontradiktorno $F(\Theta^k) \cap A = \emptyset$. Obzirom da je $\hat{x}$ proizvoljan ali fiksan, postoji otvoreni podskup A' od $A \cap \operatorname{int} F(\Theta^\circ)$ takav da je $A' \cap F^=(\Theta^k) = \emptyset$. Međutim, $A' \cap F^=(\Theta^\circ) \neq \emptyset$, jer je $F(\Theta^\circ) \subseteq F^=(\Theta^\circ)$, što je kontradiktorno pretpostavci da je preslikavanje $F^=: \Theta \to F^=(\Theta)$ poluneprekinuto odozdo u Θ°.

4.5.4. Ostala područja stabilnosti

U prethodnom odjeljku navedeni skupovi $R_i(\Theta^\circ)$, $i \in \{1, 2, \ldots, 6\}$, su područja stabilnosti modela (K, Θ) u Θ° uz uvjet da je preslikavanje $F^=: \Theta \to F^=(\Theta)$ poluneprekinuto odozdo (neka od tih područja zahtijevaju i dodatnu pretpostavku neprazne unutrašnjosti dopustivog skupa u Θ°). Međutim, neki podskupovi tih skupova također su područja stabilnosti modela (K, Θ), ali bez dodatnih pretpostavki na preslikavanje $F^=: \Theta \to F^=(\Theta)$ ili unutrašnjost $F(\Theta^\circ)$. Takvi podskupovi najčešće su i lakši za konstrukcije te, u stvari, kronološki predstavljaju »starija« područja stabilnosti dok su skupovi $R_i(\Theta^\circ)$, $i \in \{1, 2, \ldots, 6\}$, njihova naknadna proširenja uz navedene dodatne pretpostavke.

Jedna grupa takvih podskupova, odnosno područja stabilnosti u Θ°, bazira se na uvjetima na ponašanje skupa $F^=(\Theta)$ u odnosu na skup $F^=(\Theta^\circ)$, koji, u stvari, osiguravaju poluneprekinutost odozdo preslikavanja $F^=$. Radi se o slijedećim skupovima:

$$V(\Theta^\circ) = \{\Theta: F^=(\Theta^\circ) \subseteq F^=(\Theta)\} \cap R_4(\Theta^\circ),$$

$$V_1(\Theta^\circ) = \{\Theta: F^=(\Theta^\circ) \subseteq F^=(\Theta)\} \cap R_3(\Theta^\circ),$$

$$V_2(\Theta^\circ) = \{\Theta: F^=(\Theta^\circ) = F^=(\Theta)\} \cap R_4(\Theta^\circ),$$

$$V_3(\Theta^\circ) = \{\Theta: F^=(\Theta^\circ) = F^=(\Theta)\} \cap R_3(\Theta^\circ),$$

$$V_4(\Theta^\circ) = \{\Theta: F^=(\Theta^\circ) \subseteq F^=(\Theta)\} \cap R_2(\Theta^\circ),$$

$$W(\Theta^\circ) = \{\Theta: F^=(\Theta^\circ) \subseteq F^=(\Theta)\} \cap R_1(\Theta^\circ),$$

Očigledno je da je

$$V_2(\Theta^\circ) \subseteq V(\Theta^\circ) \quad i \quad V_3(\Theta^\circ) \subseteq V_1(\Theta^\circ).$$

Također, zbog odnosa između skupova $R_i(\Theta^\circ)$, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ (osim već navedenih vrijedi i $R_1(\Theta^\circ) \subseteq R_3(\Theta^\circ)$), vrijede i slijedeće implikacije:

$$W(\Theta^\circ) \subseteq V_4(\Theta^\circ) \subseteq V_1(\Theta^\circ) \subseteq V(\Theta^\circ) \text{ te}$$

$$V_3(\Theta^\circ) \subseteq V_2(\Theta^\circ) \subseteq V(\Theta^\circ).$$

(Implikacija $V_4(\Theta^\circ) \subseteq V_1(\Theta^\circ)$ proizlazi iz uvjeta $F^=(\Theta^\circ) \subseteq F^=(\Theta)$, postavljenog na te skupove.)

Skupovi $M(\Theta^\circ)$ i $V(\Theta^\circ)$ te njegov lakše odredivi podskup $W(\Theta^\circ)$ predstavljaju najstarija poznata područja stabilnosti, obrađena već u [27], gdje je i izložen izravan dokaz za područja $M(\Theta^\circ)$ i $W(\Theta^\circ)$. Za područje $V(\Theta^\circ)$ izravan dokaz može se naći u [25]. U [27] su, također, prikazane i osnove metode za određivanje područja $V(\Theta^\circ)$ i $W(\Theta^\circ)$, koje će biti izložene u 5. poglavlju ovog pregleda.

Kao područja stabilnosti promatraju se i slijedeći skupovi u R^p, također podskupovi pojedinih od skupova $R_i(\Theta^\circ)$, $i \in \{2, 3, 4\}$:

$$Z(\Theta^\circ) = \{\Theta : F(\Theta^\circ) \subseteq F^=(\Theta)\} \cap R_4(\Theta^\circ),$$

$$Z_1(\Theta^\circ) = \{\Theta : F(\Theta^\circ) \subseteq F^=(\Theta)\} \cap R_2(\Theta^\circ),$$

$$Z_2(\Theta^\circ) = \{\Theta : F(\Theta) \subseteq F^=(\Theta^\circ)\} \cap Z_1(\Theta^\circ),$$

$$Z_3(\Theta^\circ) = \{\Theta : F(\Theta) \subseteq F^=(\Theta^\circ) \subseteq F^=(\Theta)\} \cap R_3(\Theta^\circ).$$

Vidljivo je da vrijede slijedeće implikacije:

$$Z_2(\Theta^\circ) \subseteq Z_1(\Theta^\circ) \subseteq Z(\Theta^\circ).$$

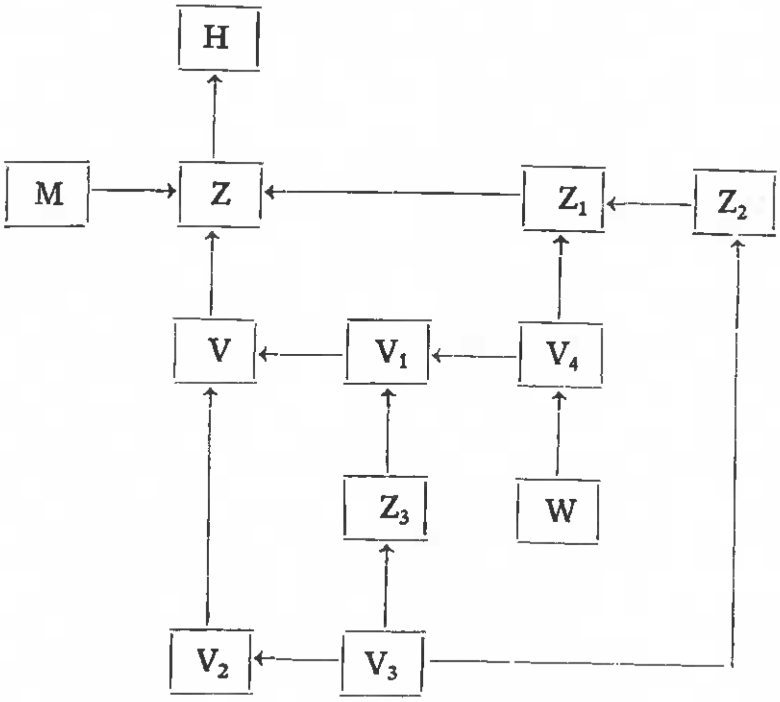
(Ova druga implikacija vrijedi zbog uvjeta $F(\Theta^\circ) \subseteq F^=(\Theta)$, sadržanog u tim skupovima.) Također vrijedi i

$$Z_3(\Theta^\circ) \subseteq Z(\Theta^\circ),$$

zbog $Z_3(\Theta^\circ) \subseteq V_1(\Theta^\circ)$ *i* $V(\Theta^\circ) \subseteq Z(\Theta^\circ)$ *(jer je* $F(\Theta^\circ) \subseteq F^=(\Theta^\circ)$*).*

Moguće je uočiti da su svi navedeni skupovi koji predstavljaju područja stabilnosti modela (K, Θ) u Θ° (bez dodatnih pretpostavki na preslikavanje $F^=$ ili na skup $F(\Theta^\circ)$), u stvari, podskupovi skupa $H(\Theta^\circ)$ koji je, prema tome, najšire poznato područje stabilnosti. Međutim, zbog mogućih teškoća u njegovom određivanju kao i određenih specifičnosti pojedinih manjih područja stabilnosti (čije su posebne karakteristike naročito značajne u do sada razvijenim numeričkim metodama optimalizacije modela MP) ima smisla obratiti pažnju i na pojedine podskupove područja $H(\Theta^\circ)$.

Na dijagramu 4.1 izložen je shematski prikaz povezanosti (u smislu inkluzije) ovih područja stabilnosti (radi preglednosti izostavljen je argument Θ°). Strelica u dijagramu označava inkluziju (npr. $M \rightarrow H$ znači $M(\Theta) \subseteq H(\Theta)$).



Dijagram 4.1.

Vidljivo je iz dijagrama da su mnoga područja stabilnosti sadržana u drugima (većina ovih inkluzija već je spomenuta). Međutim, neka područja stabilnosti, vrlo značajna u primjeni, nisu međusobno usporediva (npr. $M(\Theta^\circ)$ i $V(\Theta^\circ)$ ili $W(\Theta^\circ)$). To, u kontekstu stabilne optimalizacije modela matematičkog programiranja znači da izbor različitih područja stabilnosti unutar kojih će se model (K, Θ) stabilno perturbirati može dovesti do različitih „usputnih" realizacija modela, odnosno do različitih lokalno optimalnih realizacija modela. Moglo bi se očekivati da će izbor „većeg" područja stabilnosti dovesti do boljeg lokalno optimalnog ulaza, međutim, to ne mora uvijek biti slučaj a, s druge strane, konstrukcija „većih" područja stabilnosti najčešće iziskuje znatno veći numerički napor.

Važnost pojedinih područja stabilnosti u stabilnoj optimalizaciji modela MP biti će opisana u drugom dijelu ovog pregleda.

Slijedeći primjer ilustrira navedena područja stabilnosti:

Primjer 4.9

Promatra se konveksni model sa slijedećim ograničenjima:

$$f^1(x, \Theta) = \Theta_1 (\Theta_1 - \Theta_2) \, |x| \leq 0 ,$$

$$f^2(x, \Theta) = \Theta_2 (\Theta_1 - \Theta_2) \, |x| \leq 0 ,$$

u početnom stanju $\Theta^\circ = (0, 0)^T$. Ovdje je $F(\Theta^\circ) = R$, $P^=(\Theta^\circ) = \{1, 2\}$ i $F^=(\Theta^\circ) = R$. Može se pokazati da je područje stabilnosti $M(\Theta^\circ)$ određeno na slijedeći način:

$$M(\Theta^{\circ}) = \{(\Theta_1, \Theta_2)^T : |\Theta_1| \leq |\Theta_2|, \operatorname{sgn}\Theta_1 = \operatorname{sgn}\Theta_2\}.$$

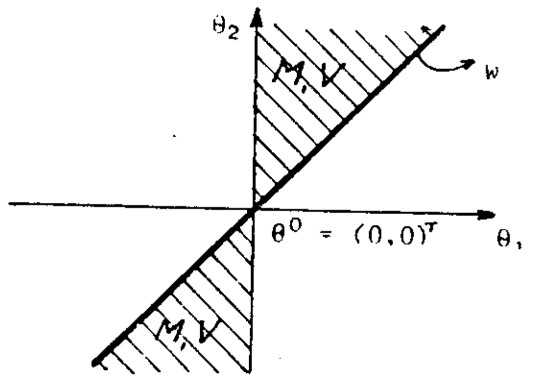
(Ovo područje prikazano je na slici 4.2 kao šrafirana površina.) Naime, za svako $\Theta \in M(\Theta^{\circ})$, $F(\Theta) = R$, dok je za svako Θ izvan $M(\Theta^{\circ})$ $F(\Theta) = \{0\}$

Nadalje, područje $W(\Theta^{\circ})$ određeno je na slijedeći način:

$$W(\Theta^{\circ}) = \{(\Theta_1, \Theta_2)^T : \Theta_1 = \Theta_2\},$$

što je, u stvari, jednako skupu $R_1(\Theta^{\circ})$ jer za svako Θ koje zadovoljava $P^{=}(\Theta) = P^{=}(\Theta^{\circ})$ (uvjet $R_1(\Theta^{\circ})$) vrijedi $F^{=}(\Theta) = F^{=}(\Theta^{\circ})$. (Na slici 4.2 ovo područje prikazano je isprekidanim pravcem kroz ishodište.)

Skup $R_2(\Theta^{\circ})$ poklapa se s područjem $M(\Theta^{\circ})$ (situacija $P^{=}(\Theta) = \emptyset$ pokriva čitav skup $M(\Theta^{\circ})$ dok $P^{=}(\Theta) \neq \emptyset$ generira samo podskupove od $M(\Theta^{\circ})$). Obzirom da je $F^{=}(\Theta^{\circ}) = F(\Theta^{\circ}) = R$, isto vrijedi i za $R_3(\Theta^{\circ})$ i $R_4(\Theta^{\circ})$. Sada, zbog $F(\Theta^{\circ}) = F^{=}(\Theta^{\circ}) = F(\Theta) = F^{=}(\Theta) = R$ za svako $\Theta \in R_2(\Theta^{\circ}) = R_3(\Theta^{\circ}) = R_4(\Theta^{\circ})$, vrijedi i
$V(\Theta^{\circ}) = V_i(\Theta^{\circ}) = Z(\Theta^{\circ}) = Z_j(\Theta^{\circ}) = M(\Theta^{\circ})$, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, $j \in \{1, 2, 3\}$. Na kraju, $P^{=}(\Theta^{\circ}) = P$ uzrokuje $F_o^{=}(\Theta) \equiv F(\Theta)$, čime područje $H(\Theta^{\circ})$ postaje identično području $M(\Theta^{\circ})$.



Slika 4.2

U gornjem primjeru područja stabilnosti $M(\Theta^{\circ})$ i $V(\Theta^{\circ})$ se poklapaju. Da to ne mora uvijek biti tako, pokazuje slijedeći primjer (preuzet iz [27]):

Primjer 4.10

Promatra se konveksni model sa slijedećim ograničenjima:

$$f^1(x) = -x \leq 0,$$

$$f^2(x, \Theta) = -\Theta \left[1 - \frac{\Theta}{|\Theta|}\right] (|x| - x) \leq 0,$$

$$f^3(x, \Theta) = \Theta \left[1 + \frac{\Theta}{|\Theta|}\right] (|x| - x) \leq 0,$$

gdje se $0 / |0|$ definira kao 1. Za svako $\Theta \in R$, $F(\Theta) = R_+$. Međutim,

$$F^{=}(\Theta) = \begin{cases} R & za \quad \Theta = 0 \\ R_+ & za \quad \Theta \neq 0 \end{cases} .$$

Prema tome, za $\Theta^\circ = 0$, $M(\Theta^\circ) = R$ dok je $V(\Theta^\circ) = \{\Theta^\circ\}$.

U prethodnom primjeru je $V(\Theta^\circ)$ podskup od $M(\Theta^\circ)$. Naravno, moguća je i obrnuta situacija. Na primjer, u RHS-perturbiranom linearnom modelu za koji ograničenja $Ax \leq \Theta$ zadovoljavaju Slaterov uvjet za svako $\Theta \in I$, $M(\Theta^\circ)$ je skup svih vektora Θ koji po komponentama nisu manji od Θ°. Ali $V(\Theta^\circ) = I$ jer je $P^{=}(\Theta) = \emptyset$ i $F^{=}(\Theta) = R^n$ za svako $\Theta \in I$.

U stvari, ako je za neki konveksni model (K, Θ) zadovoljen Slaterov uvjet za $\Theta = \Theta^\circ$, tada, zbog neprekinutosti funkcija ograničenja, Slaterov uvjet također vrijedi i za $\Theta \in N(\Theta^\circ)$, gdje je $N(\Theta^\circ)$ neka okolina od Θ°, To znači da je

$$P^{=}(\Theta^\circ) = P^{=}(\Theta) = \emptyset \quad i \quad F^{=}(\Theta^\circ) = F^{=}(\Theta) = R^n$$

za svako $\Theta \in N(\Theta^\circ)$. Tada neka područja stabilnosti (npr. $R_1(\Theta^\circ)$, $V(\Theta^\circ)$, $W(\Theta^\circ)$, ali ne i $M(\Theta^\circ)$) postaju jednaka okolini $N(\Theta^\circ)$ od Θ°, što znači da je model stabilan u Θ°. Dakle, zadovoljenje Slaterovog uvjeta za (K, Θ°) je dovoljan uvjet stabilnosti modela u Θ°. Naravno, on nije i nužan, što ilustrira primjer 4.10.

Postoje i situacije u kojima model (K, Θ) nije moguće stabilno perturbirati oko polaznog stanja Θ°, tj. kada svaka perturbacija modela iz početne realizacije dovodi do skokovitih promjena izlaza modela. Tada je, naravno, $S(\Theta^\circ) = \{\Theta^\circ\}$.

4.6. *Radius stabilnosti*

Kažemo da je model (K, Θ) stabilan u $\Theta = \Theta^\circ$ ako je neko područje stabilnosti moguće zamijeniti okolinom od Θ°. Međutim, u praktičnim primjenama čini se značajnim određivanje veličine te okoline. Ovo poglavlje završiti ćemo definiranjem mjere veličine stabilne okoline od Θ°, odnosno mjere stabilnosti modela (K, Θ) u Θ° — tzv. radiusa stabilnosti.

Definicija 4.2

Radius stabilnosti $r > 0$ za ograničenja konveksnog modela (K, Θ) u Θ° je radius najveće otvorene kugle

$$S(\Theta^\circ, r) = \{ \Theta : || \Theta - \Theta^\circ || < r \}$$

sa svojstvom da je (K, Θ) stabilan u svakom $\Theta \in S(\Theta^\circ, r)$.

Određivanje radiusa stabilnosti značajno je jer daje informaciju u kojoj mjeri je dozvoljeno naprezati sistem (u smislu perturbacija polaznih parametara) a da se ne izazove drastična reakcija (tj. da ne dođe do prekida skupa dopustivih rješenja).

Nadalje, radius stabilnosti daje korisnu informaciju prilikom primjene numeričkih metoda jer vrlo mali radius stabilnosti indicira opasnost od „iskakanja" iz područja stabilnosti uslijed nepreciznosti i grešaka u računskim operacijama.

Primjer 4.10 zanimljiv je i u kontekstu određivanja radiusa stabilnosti jer pokazuje da model (K, Θ) može imati beskonačno velik radius stabilnosti iako Slaterov uvjet nije zadovoljen u realizaciji za koju se on određuje.

Slijedeći primjer ilustrira pojam radijusa stabilnosti:

Primjer 4.11

Promatra se slijedeći konveksan model:

$$\min f^{\circ}(x) = -x_2$$

p. o.

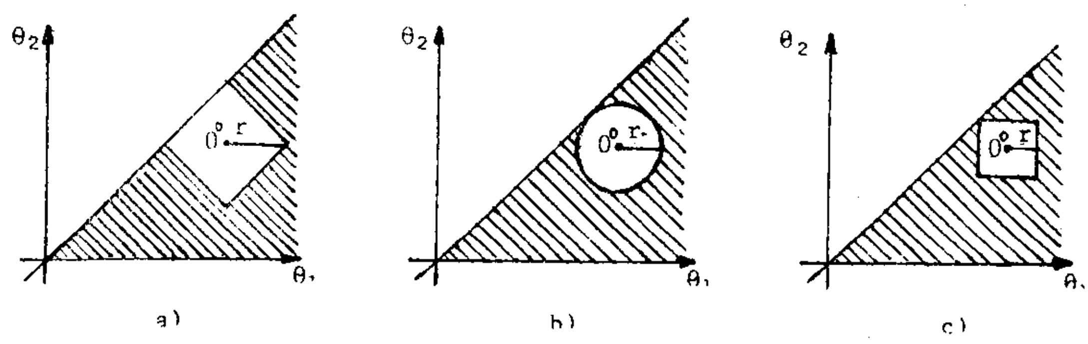
$$f^1(x, \Theta) = x_1^2 - x_2 + \Theta_2 < 0$$

$$f^2(x, \Theta) = x_1^2 + x_2^2 - \Theta_1^2 < 0$$

oko početnog stanja $\Theta^{\circ} = (3, 2)^T$. Model je stabilan za vrijednosti Θ_1 i Θ_2 koje zadovoljavaju slijedeće nejednadžbe:

$$\Theta_1 \geq \Theta_2$$
$$\Theta_1 \geq 0$$

(u protivnom, skup dopustivih rješenja je prazan skup). Slika 4.3 ilustrira radius stabilnosti ovog modela u ovisnosti o izboru norme (slika 4.3a) odnosi se na izbor l_1-norme, 4.3b) na izbor l_2-norme a 4.3c) na izbor l_∞-norme):



Slika 4.3.

Iz slike 4.3 vidljivo je da radius stabilnosti modela MP ovisi i o izboru norme po kojoj se određuje te je stoga važno odabrati normu koja najbolje odgovara prirodi problema koji model MP opisuje.

5. NEKE NUMERIČKE METODE U PRVOJ ETAPI STABILNE OPTIMALIZACIJE

Na početku poglavlja izložene su neke metode za određivanje minimalnog skupa indeksa aktivnih ograničenja $P^=(\Theta)$ čija je ključna uloga u analizi stabilnosti modela i identifikaciji lokalno optimalnog ulaza uočljiva iz dosadašnjeg dijela ovog pregleda. Nadalje, prikazane su i metode za određivanje nekih konkretnih područja stabilnosti modela (K, Θ), dakle, numerički dio prve etape procesa optimalizacije modela MP.

Pri izlaganju navedenih metoda koriste se problemski orjentirani blok-dijagrami čiji pojedini dijelovi se ne odnose na konkretne operacije već na skupine operacija sadržane u pojedinim problemima unutar tih metoda (za mnoge od tih problema efikasna razrada po koracima još je uvijek otvoreno pitanje).

5.1. *Određivanje minimalnog skupa indeksa aktivnih ograničenja*

Poznate su dvije metode za određivanje skupa $P^=$ (obzirom da se minimalni skup indeksa aktivnih ograničenja određuje za neko fiksno Θ, u ovom odjeljku izostavlja se argument Θ). Prva metoda (izložena u [04], prema Abrams i Kerzner) u početnom koraku polazi od praznog skupa i iterativnim povećavanjem u konačnom broju koraka (najviše card $P(x^*)$, gdje je x^* proizvoljno odabrana dopustiva točka programa (K)) dolazi do skupa $P^=$. Druga metoda (izložena u [26]) polazi od skupa indeksa svih ograničenja P i iterativnim smanjivanjem u konačnom broju koraka (najviše card $(P(x^*) \setminus P^=)$ dolazi do skupa $P^=$. Obje metode se bitno pojednostavljuju u slučaju kada su funkcije ograničenja vjerno konveksne funkcije (po x). Naime, obje metode uključuju određivanje konusa smjerova konstantnosti koji je u općem slučaju teško odrediv. Međutim, ako su funkcije ograničenja vjerno konveksne (vidi (3.F1), napom. 6), tj. moguće ih je prikazati kao:

$$f^i(x) = h^i(A_i x + b^i) + (a^i)^T x + \alpha_i,\ i \in P, \tag{5.1}$$

gdje su $h^i\colon R^n \to R$, $i \in P$, striktno konveksne funkcije, $A_i \in R^{m\times n}$, $b^i \in R^m$, $a^i \in R^n$ i $\alpha_i \in R$, $i \in P$, tada konus smjerova konstantnosti za te funkcije u nekoj tački ne ovisi o izboru te točke i moguće ga je odrediti kao

$$D^=_i = N\begin{bmatrix} A_i \\ (a^i)^T \end{bmatrix},\ i \in P \tag{5.2}$$

gdje N označava nula-prostor ove proširene matrice. Konus smjerova konstantnosti za vjerno konveksnu funkciju čija eksplicitna reprezentacija (5.2) nije poznata također je moguće jednostavno odrediti (metoda, prema Wolkowicz, može se naći u npr. [04]).

U nastavku odjeljka izložene su obje metode za određivanje skupa $P^=$ u dvije varijante — općenitoj i pojednostavljenoj, koja se odnosi na programe s vjerno konveksnim funkcijama ograničenja.

5.1.1. Metoda Abrams-Kerzner

a) Varijanta za proizvoljne konveksne programe (K)

Nakon izbora proizvoljne fiksne točke $x^* \in F$ i određivanja $P(x^*)$, metoda započinje s $\Omega = \emptyset$ i u konačnom broju iteracija završava sa $\Omega = P^{=}$. U svakoj iteraciji rješava se sustav (AK, Ω):

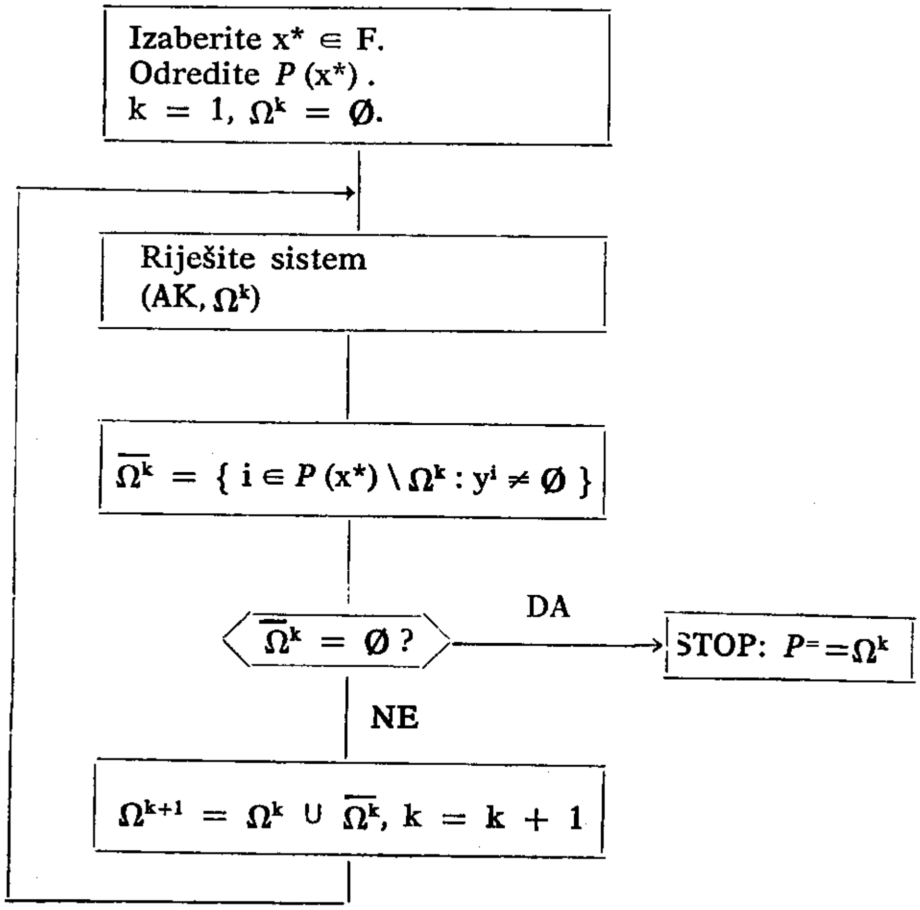
$$y + \sum_{i \in P(x^*)\setminus\Omega} y^i = 0$$

$$y \in \left[D^{=}_{\Omega}(x^*)\right]^+, \quad y^i \in \left[D_i^{<}(x^*)\right]^+, \quad i \in P(x^*) \setminus \Omega, \text{ ne svi nula,}$$

čija rješivost predstavlja kriterij zaustavljanja.

Dokaz validnosti ove metode bazira se na teoremu separacije (Dubovitskii-Milyutin) i nekim svojstvima skupa $P^{=}$. Puni dokaz može se naći u [04].

Metoda u (problemskim) koracima izložena je u dijagramu 5.1:



Dijagram 5.1

b) Varijanta za programe (K) s vjerno konveksnim funkcijama ograničenja

Neka su funkcije ograničenja f^i, $i \in P$, diferencijabilne vjerno konveksne funkcije, dane kao (5.1). U tom slučaju, metoda Abrams-Kerzner se modificira utoliko što se u svakoj iteraciji, umjesto sustava (AK, Ω), rješava sustav (AK', Ω) (s varijablama $\lambda_i \in R$, $i \in P(x^*)\backslash\Omega$ i $u^i \in R^{m_i+1}$, $i \in \Omega$):

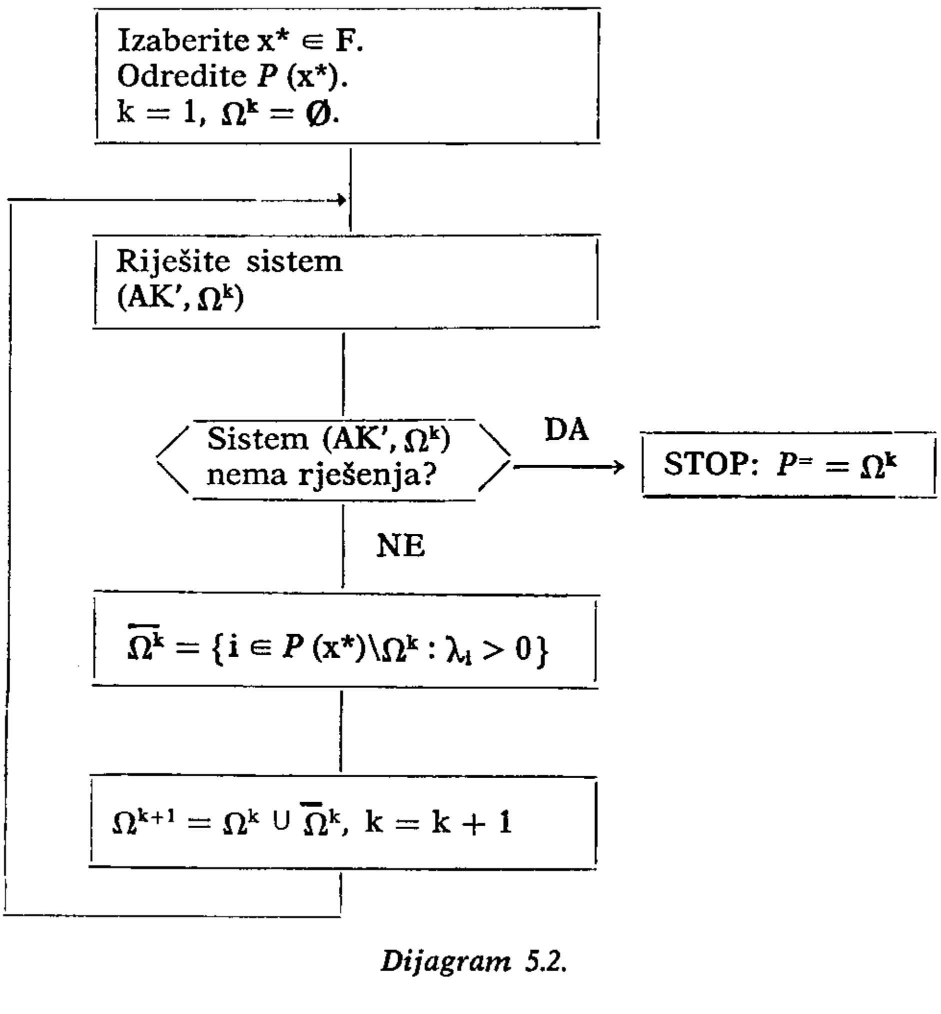
$$\sum_{i \in P(x^*)\backslash\Omega} \lambda_i \nabla f^i(x^*) - \sum_{i \in \Omega} [A^T_i, a^i]\, u^i = 0,$$

$$\lambda_i \geq 0 \qquad \sum_{i \in P(x^*)\backslash\Omega} \lambda_i = 1.$$

U ovoj varijanti metode rješivost sustava (AK', Ω) koristi se kao kriterij zaustavljanja.

Vidljivo je da je ovaj sustav znatno jednostavniji od sustava (AK, Ω), tj. da se u ovom slučaju svaka iteracija metode svodi na rješavanje homogenog sustava linearnih jednadžbi uz uvjete nenegativnosti na neke varijable. Međutim, ova varijanta metode očigledno je primjenjiva samo ako je moguće odrediti eksplicitnu reprezentaciju (5.1) vjerno konveksnih funkcija ograničenja.

Koraci ove varijante metode Abrams-Kerzner prikazani su na dijagramu 5.2.



Dijagram 5.2.

Ova metoda ilustrirana je primjerom:

Primjer 5.1

Promatraju se ograničenja:

$$f^1(x) = -x_1 + x_3^2 \leq 0,$$

$$f^2(x) = x_1 \leq 0,$$

$$f^3(x) = x_2 \leq 0,$$

$$f^4(x) = x_3 \leq 0.$$

Uočimo da se radi o vjerno konveksnim funkcijama, pri čemu je:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = A_3 = A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$a^1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad a^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad a^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad a^4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

Inicijalizacija. Izbor npr. $x^* = (0, 0, 0)^T$ daje $P(x^*) = P$, odnosno uz

$\Omega^1 = \emptyset)$, $P(x^*)\backslash\Omega^1 = P$.

1. iteracija. Pripadni sustav (AK', Ω^1) je:

$$-\lambda_1 + \lambda_2 = 0,$$

$$\lambda_3 = 0,$$

$$\lambda_4 = 0,$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1,$$

$$\lambda_i \geq 0, \ i \in \{1, 2, 3, 4\},$$

što daje rješenje $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.5$, $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$. Prema tome je $\overline{\Omega^1} = \{1, 2\}$.

2. iteracija. Ova iteracija počinje s $\Omega^2 = \{1, 2\} \cup \emptyset = \{1, 2\}$. Sada je $P(x^*)\backslash\Omega^2 = \{(3, 4\}$ pa je pripadni sustav (AK', Ω^2):

$$u_4^1 - u_4^2 = 0,$$

$$\lambda_3 = 0,$$

$$\lambda_4 - u_1^1 = 0,$$

$$\lambda_3 + \lambda_4 = 1,$$

$$\lambda_3 \geq 0,\ \lambda_4 \geq 0.$$

Rješenje ovog sustava je $\lambda_3 = 0$ i $\lambda_4 = 1$, te je stoga $\overline{\Omega}^2 = \{4\}$.

3. iteracija. Sada je $\Omega^3 = \{1, 2, 4\}$ i $P(x^*) \backslash \Omega^3 = \{3\}$. Pripadni sustav (AK', Ω^3):

$$u_4^1 - u_4^3 = 0,$$

$$\lambda_3 = 0,$$

$$-u_1^1 - u_4^4 = 0,$$

$$\lambda_3 = 1,$$

očigledno nema rješenja pa je stoga $P^= = \{1, 2, 4\}$.

5.1.2. Metoda Zlobec-Craven

Ova metoda primjenjiva je samo na diferencijabilne konveksne modele jer program koji se rješava u svakoj njenoj iteraciji sadrži gradijente funkcija ograničenja. Suprotno prethodnoj, ova metoda ne polazi od praznog skupa već od skupa indeksa aktivnih ograničenja u proizvoljno odabranoj dopustivoj točki x* čijim sukcesivnim smanjivanjem dolazi do minimalnog skupa indeksa aktivnih ograničenja $P^=$. I za ovu metodu izložene su dvije varijante — općenita i varijanta za konveksne programe s vjerno konveksnim funkcijama ograničenja.

a) Varijanta za proizvoljne diferencijabilne konveksne programe

Inicijalizacija ove metode, uz izbor proizvoljne dopustive točke x*, uključuje i specifikaciju tolerancije $\varepsilon > 0$. U svakoj iteraciji metode rješava se jednoparametarski program (ZC, Θ, Ω) (po varijablama $d \in R^n$, $\delta^i \in R^n$, $i \in P(x^*)$):

$$\min \sum_{i \in \Omega} [\nabla f^i(x^*)]^T d$$

$$p.\ o.$$

$$[\nabla f^i(x^*)]^T d + \Theta \|d - \delta^i\|_1 \leq 0,$$

$$\delta^i \in D_i^=(x^*),$$

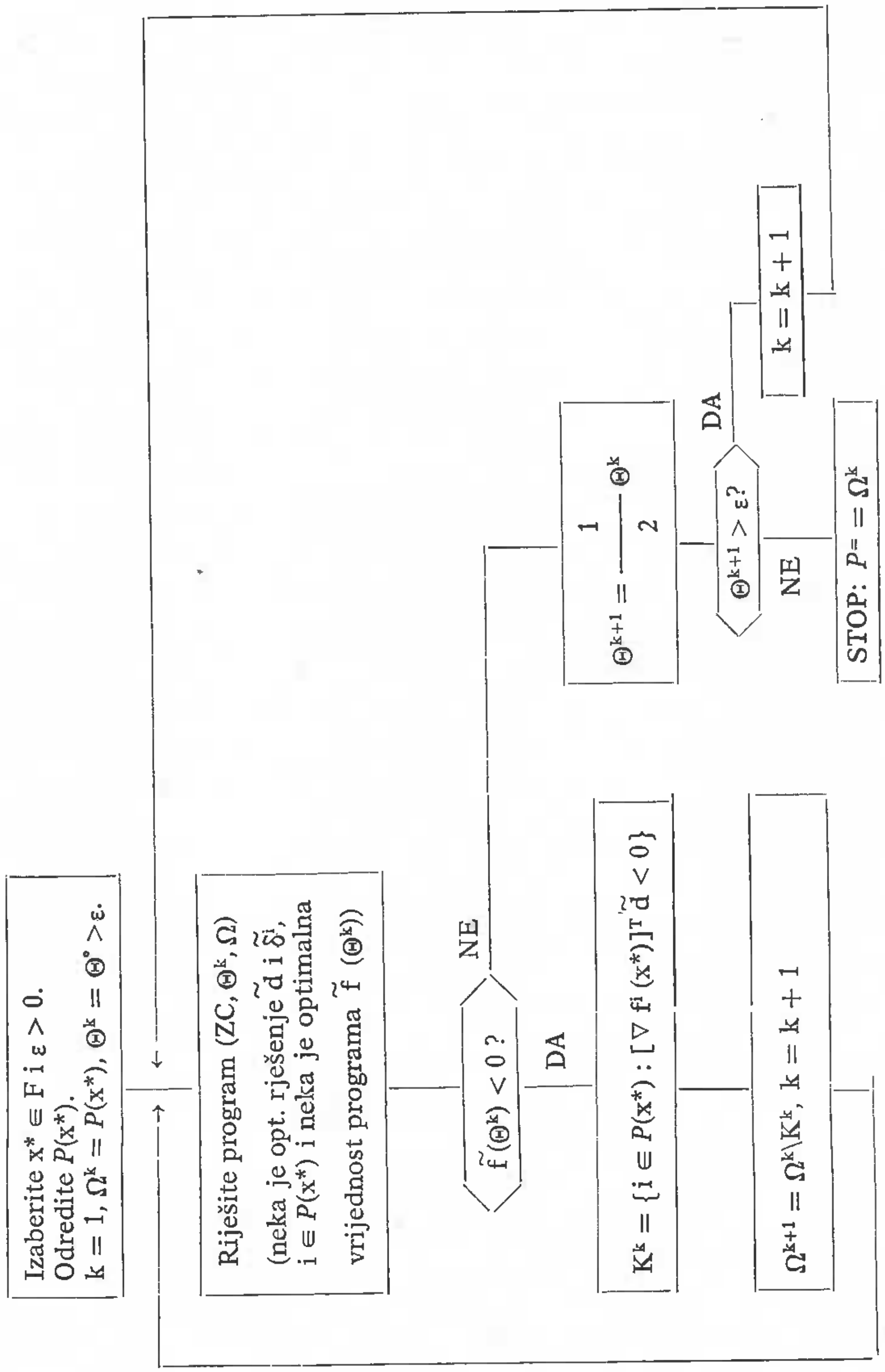
$$|d_j| \leq 1,\ |\delta_j^i| \leq 1,\ j \in \{1, 2, \ldots, n\},\ i \in P(^*)$$ [16]

U ovom slučaju kriterij zaustavlajnja bazira se na odgovarajućoj usporedbi rješenja ovog programa i unaprijed zadanog nivoa tolerancije ε. Dijagram 5.3 prikazuje ovu metodu u koracima.

---

[16] Apsolutne vrijednosti varijabli tretiraju se na uobičajeni način: za neku varijablu u_j koristi se transformacija

$$u_j = u_j^+ - u_j^-,\ |u_j| = u_j^+ + u_j^-, u_j^+ \cdot u_j^- = 0, u_j^+ \geq 0, u_j^- \geq 0.$$


Izaberite x* ∈ F i ε > 0.
Odredite P(x*).
k = 1, Ωᵏ = P(x*), Θᵏ = Θ° > ε.
Riješite program (ZC, Θᵏ, Ω)
(neka je opt. rješenje d̃ i δ̃ⁱ,
i ∈ P(x*) i neka je optimalna
vrijednost programa f̃ (Θᵏ))
f̃ (Θᵏ) < 0 ?
DA
NE
Kᵏ = {i ∈ P(x*) : [∇ fⁱ (x*)]ᵀ d̃ < 0}
Ωᵏ⁺¹ = Ωᵏ\Kᵏ, k = k + 1
Θᵏ⁺¹ = 1/2 Θᵏ
Θᵏ⁺¹ > ε?
DA
NE
k = k + 1
STOP: P= = Ωᵏ

Dijagram 5.3

Ova metoda bazira se na činjenicama da, za proizvoljnu dopustivu točku x* programa (K) $\tilde{f}(\Theta) = 0$ za svako »dovoljno malo« $\Theta > 0$ implicira $P^= = P(x^*)$, odnosno da $\tilde{f}(\Theta) < 0$ za neko $\Theta > 0$ implicira $P^= \neq P(x^*)$. (Dokazi ovih tvrdnji kao i konvergentnosti i konačnosti ove metode mogu se naći u [26].) Očigledno je da za polaznu vrijednost parametra Θ (Θ°) treba odabrati »dovoljno malu« vrijednost jer manje vrijednosti Θ generiraju manje optimalne vrijednosti $\tilde{f}(\Theta)$. Izbor nivoa tolerancije naravno ovisi o konkretnom problemu (autori ove metode su u testiranim programima koristili nivo tolerancije $\varepsilon = 0.01$).

b) Varijanta za diferencijabilne konveksne programe (K) s vjerno konveksnim funkcijama ograničenja

Neka su funkcije f^i, $i \in P$, diferencijabilnog konveksnog programa (K) vjerno konveksne funkcije dane kao (5.1). Tada je u metodi prikazanoj u dijagramu 5.3 program (ZC, Θ, Ω) moguće zamijeniti programom (ZC', Θ, Ω) (u varijablama $d = [d_i] \in R^n$):

$$\min \sum_{i \in \Omega} [\nabla f^i(x^*)]^T d$$

p. o.

$$[\nabla f^i(x^*)]^T d + \Theta \left(|a_k{}^T d| + \sum_{j=1}^{m_i} |A_i{}^j d| \right) \leq 0, \quad i \in P(x^*),$$

$$|d_j| \leq 1, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$[17]

gdje $A_i{}^j$ označava j-ti redak matrice A_i.

(Obzirom da je u svim ostalim koracima ova varijanta identična prethodnoj, za nju nije posebno sastavljen blok-dijagram.)

Vidljivo je da je i ova metoda bitno pojednostavljena za vjerno konveksne funkcije ograničenja jer je, korištenjem (5.2), program (ZC, Θ, Ω) sveden na linearni program.

Metoda Zlobec-Craven ilustrirana je istim primjerom kao i prethodna metoda:

Primjer 5.2

(Promatraju se ograničenja iz primjera 5.1.)

Inicijalizacija. Izbor $x^* = (0, 0, 0)^T$, uz $P(x^*) = \{1, 2, 3, 4\}$ daje $\Omega^1 = \{1, 2, 3, 4\}$. Odaberimo neko $\Theta^\circ > 0$.

---

[17] Autori ove metode preporučuju uključivanje i dodatnih uvjeta normalizacije:

$$\sum_{j=1}^{n} |d_j| \leq \delta, \quad n - 1 \leq \delta \leq n,$$

radi ubrzavanja konvergencije metode. Ovdje se, naravno, radi o u biti linearnim ograničenjima.

1. iteracija. Obzirom na Ω^1, pripadni program $(ZC', \Theta^\circ, \Omega^1)$ je:

$$\min (d_2 + d_3)$$

p. o.

$$-d_1 + \Theta^\circ (|d_1| + |d_3|) \leq 0,$$

$$d_1 \leq 0, \quad d_2 \leq 0, \quad d_3 \leq 0,$$

$$|d_i| \leq 1, \quad i \in \{1, 2, 3\},$$

s optimalnim rješenjem:

$$\tilde{d} = (0, -1, 0)^T \ i \ \tilde{f}(\Theta^\circ) = -1.$$

Sada je $K^1 = \{3\}$ (gradijenti funkcija ograničenja poznati su iz primjera 5.1)

2. iteracija. Budući da je $\Omega^2 = P(x^*) \backslash K^1 = \{1, 2, 4\}$, pripadni program $(ZC', \Theta^\circ, \Omega^2)$ je:

$$\min d_3$$

p. o.

$$-d_1 + \Theta^\circ (|d_1| + |d_3|) \leq 0,$$

$$d_1 \leq 0, \quad d_3 \leq 0,$$

$$|d_i| \leq 1, \quad i \in \{1, 3\},$$

s optimalnim rješenjem $\tilde{d}_1 = \tilde{d}_3 = 0$ i optimalnom vrijednošću $\tilde{f}(\Theta^\circ) = 0$, neovisnom od Θ°. Prema tome je $P^= = \{1, 2, 4\}$. (U ovom primjeru metoda Zlobec-Craven određuje minimalni skup indeksa aktivnih ograničenja u drugom koraku neovisno o izboru $\Theta^\circ > 0$, jer optimalna vrijednost programa (ZC', Θ, Ω) ne ovisi o Θ.)

Kada je minimalni skup indeksa aktivnih ograničenja jednom određen, lako je odrediv i skup $F^=$, ukoliko se radi o konveksnom programu s vjerno konveksnim funkcijama ograničenja. Naime, može se pokazati da je taj skup jednak skupovnom zbroju neke proizvoljne dopustive točke i presjeka konusa smjerova konstantnosti svih ograničenja koja pripadaju skupu $P^=$. U slučaju kada su funkcije ograničenja vjerno konveksne funkcije dane kao (5.1), to daje:

$$F^= = x^* \oplus \bigcap_{i \in P^=} N\begin{pmatrix} A_i \\ a^T{}_i \end{pmatrix} \tag{5.3}$$

gdje je x^* proizvoljna ali fiksna dopustiva točka programa (K). (Izraz (5.3) u stvari je već spomenut — vidjeti (2.19).)

5.2. *Određivanje nekih područja stabilnosti*

U ovom odjeljku izložene su osnovne ideje metode za određivanje područja stabilnosti $V(\Theta^{\circ})$ i njegovih podskupova $W(\Theta^{\circ})$ i $V_3(\Theta^{\circ})$, konveksnog modela (K, Θ) u nekom $\Theta = \Theta^{\circ}$. U nastavku odjeljka prikazana je metoda za određivanje područja stabilnosti $M(\Theta^{\circ})$ za linearni program (L, Θ) u $\Theta = \Theta^{\circ}$.

5.2.1. Određivanje područja stabilnosti $V(\Theta^{\circ})$ (i nekih njegovih podskupova) konveksnog modela (K, Θ)

Ovdje prikazana metoda (originalno izložena u [27]) polazi od nekog proizvoljnog dopustivog rješenja $x^* \in F(\Theta^{\circ})$ za koje određuje skup svih vektora parametara Θ za koje je to rješenje još uvijek dopustivo te, postupnim smanjivanjem tog skupa dolazi do područja stabilnosti $V(\Theta^{\circ})$ i/ili $W(\Theta^{\circ})$. U stvari, ova metoda ne osigurava identifikaciju čitavih ovih područja stabilnosti već kao njen rezultat može proizaći i neki podskup ovih područja.

Metoda je, u (problemskim) koracima, izložena u dijagramu 5.4

Odabire se $x^* \in F(\Theta^{\circ})$.
Određuje se skup
$I = \{\Theta : x^* \in F(\Theta)\}$.

Određuje se skup
$I' \subseteq I$ takav da $P(x^*, \Theta)$
ne ovisi o Θ za $\Theta \in I$.

Određuje se skup
$\overline{I} \subseteq I'$ takav da je
$P^{=}(\Theta) \subseteq P^{=}(\Theta^{\circ})\ \forall \Theta \in \overline{I}$

A

Određivanje $V(\Theta^{\circ})$:

A

Određuje se skup
$v_1 = \{\Theta \in \bar{I}: P^{=}(\Theta) = \emptyset\}$.

Određuje se skup
$v \subseteq {}_1v$ takav da je
$f^i(x, \Theta) \leq 0,\ i \in P^{=}(\Theta^{\circ}),\ \forall\, x \in F(\Theta^{\circ})$

STOP: $V \subseteq V(\Theta^{\circ})$

Određivanje $W(\Theta^{\circ})$:

A

Određuje se skup
$w = {}_1\{\Theta \in \bar{I}: P^{=}(\Theta) = P^{=}(\Theta^{\circ})\}$

Određuje se skup
$w = \{{}_1\Theta \in w: F^{=}(\Theta^{\circ}) \subseteq F^{=}(\Theta)\}$

STOP: $W \subseteq W(\Theta^{\circ})$

Dijagram 5.4

Prva tri koraka metode ne razlikuju se u ovisnosti da li se traži područje $V(\Theta^{\circ})$ ili $W(\Theta^{\circ})$, dok se preostala dva razlikuju, što je prikazano i na dijagramu 5.4. U trećem koraku metoda u sebi uključuje metodu za određivanje minimalnog skupa indeksa aktivnih ograničenja (Abrams-Kerzner) te je u tom dijelu iterativna. U svakoj iteraciji određuje se skup $I'' = \{\Theta: \Omega(\Theta) \subseteq P^{=}(\Theta^{\circ})\}$. Nakon najviše card $P^{=}$ iteracija dobiva se željeni skup $\bar{I}$.

Na sličan način moguće je odrediti i područja $V_i(\Theta^{\circ})$, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, podskupove od $V(\Theta^{\circ})$. Obzirom na značaj područja $V_3(\Theta^{\circ})$ u metodama za rješavanje problema optimalizacije modela MP, ovdje je izložen i način njegova određivanja (ili njegovog podskupa). Prva tri koraka metode ostaju nepromijenjena a nastavak je modificiran na slijedeći način:

A

Određuje se skup
$v_2 = \{\Theta \in \bar{I} : F^{=}(\Theta^{\circ}) = F^{=}(\Theta)\}$

Određuje se skup
$v' \subseteq {}_2v$ takav da je
$f^i(x, \Theta) \leq 0$, $i \in P^{=}(\Theta^{\circ})$, $\forall\, x \in F^{=}(\Theta^{\circ})$

STOP: $V' \subseteq V_3(\Theta^{\circ})$

Dijagram 5.5

U slijedećem primjeru ilustriran je način određivanja podskupova ovih triju područja stabilnosti ($V(\Theta^{\circ})$, $W(\Theta^{\circ})$ i $V_3(\Theta^{\circ})$).

Primjer 5.3

Promatra se konveksan model (K, Θ) s ograničenjima:

$$
\begin{aligned}
f^1(x, \Theta) &= -\Theta_1 x_1 + x_3^2 \leq 0,\\
f^2(x) &= x_1 \leq 0,\\
f^3(x, \Theta) &= (\Theta_2 - \Theta_1)\, x_2 \leq 0,\\
f^4(x, \Theta) &= \Theta_2 x_3 \leq 0,
\end{aligned}
$$

u početnom stanju $\Theta^{\circ} = (1, 2)^T$. (Primjetimo da u tom stanju ova ograničenja odgovaraju onima iz primjera (5.1).) Ovdje je

$$F(\Theta^{\circ}) = \{x = [x_j] \in R^3 : x_1 = x_3 = 0,\ x_2 \leq 0\}.$$

Odaberimo $x^* = (0, 0, 0)^T \in F(\Theta^{\circ})$. Tada je $x^* \in F(\Theta)$ za $\Theta \in I = R^2$. Obzirom da je $P(x^*, \Theta) = \{1, 2, 3, 4\}$ za svako $\Theta \in R^2$, vrijedi i da je $I' = R^2$. U trećem koraku, primjenom metode Abrams-Kerzner, u 1. iteraciji dobiva se sistem:

$$
\begin{aligned}
&-\Theta_1 \lambda_1 + \lambda_2 = 0,\\
&(\Theta_2 - \Theta_1)\, \lambda_3 = 0,\\
&\Theta_2 \lambda_4 = 0,\\
&\lambda_i \geq 0,\ \sum_i \lambda_i = 1, \quad i \in \{1, 2, 3, 4\}.
\end{aligned}
$$

Analizom rješenja ovog sistema za različite vrijednosti Θ_1 i Θ_2 te daljnjim iteracijama metode pokazuje se da je $P^{=}(\Theta) = P^{=}(\Theta^{\circ} = \{1, 2, 4\}$ za sve vrijednosti Θ_1 i Θ_2 takve da je $\Theta_1 \neq \Theta_2$ tj. da je skup $\bar{I} = \{\Theta \in R^2 : \Theta_1 \neq \Theta_2\}$.

Za određivanje podskupova od V(Θ'), u četvrtom koraku dobiva se:

$$V_1 = \{\Theta: \Theta_1 \neq \Theta_2, \Theta_1 < 0, \Theta_2 \neq 0\}.$$

te, u petom koraku, V = V_1.

Pri određivanju podskupa od W (Θ'), dobiva se:

$$W_1 = \{ \Theta : \Theta_1 \neq \Theta_2, \Theta_1 > 0\}.$$

U petom koraku, obzirom da je $F^{=}(\Theta') = \{ x = [x_j] \in R^2 : x_1 = x_3 = 0 \}$, to je i $W_1 = W$.

Kod određivanja podskupa od $V_3(\Theta')$, uočava se da je $V' = V_2 = W_1$.

5.2.2. Određivanje područja stabilnosti M (Θ°) linearnih modela

U nastavku poglavlja izložen je jedan od načina konstrukcije područja stabilnosti M (Θ') (ili nekog njegovog podskupa) za male linearne modele (L, Θ) s ograničenjima:

$$A(\Theta)\, x \leq b(\Theta)$$
$$x \geq 0,$$

gdje je $x \in R^n$, $A(\Theta) \in R^{m \times n}$ i $b \in R^m$. Za primjenu ove metode potrebna je dodatna pretpostavka da je F(Θ') ograničen skup.

Metoda koristi činjenicu da se politop F (Θ') može prikazati kao konveksna kombinacija svih njegovih vrhova tj. bazičnih dopustivih rješenja (BDR). Sada, ako označimo s

$$B_k(\Theta) = A(\Theta)\, x^k{}_B(\Theta'),\ k \in K$$

područje stabilnosti M (Θ') = { F (Θ°) ⊆ F (Θ) }, može se prikazati kao:

$$M(\Theta^\circ) = \{ \Theta: conv \{ B_k(\Theta), k \in K \} \leq b(\Theta) \},$$

gdje „conv { S }" označava konveksnu ljusku od S.

Metoda u koracima prikazana je u dijagramu 5.6.

Metoda je ilustrirana primjerom:

Primjer 5.4

Promatra se linearni model (L, Θ) s ograničenjima:

$$x_1 + \Theta_2 x_2 \leq 2,$$
$$-\Theta_1 x_1 + 2x_2 \leq \Theta_2,$$
$$x_1 \leq 2\Theta_1,$$
$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0,$$

Određuju se x^k_B, $k \in K$,
sva BDR programa (L, Θ°)

Određuje se matrica:
$B(\Theta) = [B_{ik\,(mxq)}]$
sa stupcima:
$B_k(\Theta) = A(\Theta)\, x^k_B(\Theta)$, $k \in K$

Određuje se
$\beta_i(\Theta) = \underset{k}{\mathrm{Max}}\, B_{ik}(\Theta)$

Određuje se skup:
$M = \{\, \Theta : \beta_i(\Theta) \leq b_i(\Theta) \,\}$

STOP: $M \subseteq M(\Theta^\circ)$

Dijagram 5.6.

u početnom stanju $\Theta^\circ = (1, 1)^T$. Za program (L, Θ°) postoje četiri bazična dopustiva rješenja:

$$x^1_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad x^2_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad x^3_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad x^4_B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

Sada je matrica

$$B(\Theta) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1+\Theta_2 & \Theta_2/2 \\ 0 & -\Theta_1 & 2-\Theta_1 & 1 \\ 0 & & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

U trećem koraku dobiva se:

$$\beta_1(\Theta) = Max\{\, 2,\ 1+\Theta_2,\ \Theta_2/2 \,\} \leq 2,$$

$$\beta_2(\Theta) = Max\{\, 2 - \Theta_1, 1 \,\} \leq \Theta_2,$$
$$\beta_3(\Theta) = \quad 1 \quad \leq 2\Theta_1.$$

Iz prvog uvjeta dobiva se $\Theta_2 \leq 1$, što zajedno s drugim uvjetom daje $\Theta_2 = 1$. Sada drugi uvjet postaje $2 - \Theta_1 \leq 1$, odnosno, $\Theta_1 \geq 1$. To znači da je područje stabilnosti $M \subseteq M(\Theta^*)$ određeno kao:

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} \Theta_1 \\ 1 \end{bmatrix} : \Theta_1 \geq 1 \right\},$$

odnosno da male promjene parametra Θ_1 u pozitivnom smjeru osiguravaju neprekinute promjene skupa dopustivih rješenja dok perturbacije Θ_1 iz $\Theta^*_1 = 1$ u negativnom smjeru uzrokuju skokovite promjene tog skupa. Vrijednost parametra Θ_2 uopće nije uputno mijenjati jer svaka promjena polazne vrijednosti $\Theta^*_2 = 1$ dovodi do nestabilnosti modela.

Efikasno izračunavanje područja stabilnosti u općem slučaju za linearne i konveksne modele netrivijalno je i predstavlja izazov za numeričkog matematičara i analitičara sistema. Međutim, u mnogim praktičnim situacijama neka od ovih područja mogu se efikasno izračunati (vidjeti npr. [29]).

6. ZAKLJUČAK

Svrha prvog dijela ovog pregleda bila je da upozna čitaoca s konceptom optimalizacije modela matematičkog programiranja te da iscrpnim prikazom rezultata vezanih uz analizu stabilnosti modela matematičkog programiranja ukaže na njen novi, konstruktivan pristup toj problematici.

U drugom dijelu može se očekivati pregled rezultata vezanih uz karakterizaciju optimalnosti modela matematičkog programiranja (gdje su također postignuti mnogi novi rezultati kao logično proširenje karakterizacija optimalnosti matematičkog programa pomoću sedlaste točke). Također će biti spomenuti i neki specifični slučajevi optimalizacije modela matematičkog programiranja (komplementarni problem, vremenski ovisna optimalizacija modela matematičkog programiranja i dr.).

Primljeno: 16. 06. 1989.
Prihvaćeno: 26. 06. 1989.

LITERATURA

[01] Allen, R. G. D: "Mathematical Economics", The MacMillan Press Ltd., London, 1973.

[02] Bank, B., Guddat, J., Klatte, D., Kummer, B., Tammer, K.: "Nonlinear parametric optimization", Akademie-Verlag, Berlin, 1982.

[03] Baumol, W. J.: "Economic theory and operations analysis", Prentice/ Hall International, Inc., London, 1977.

[04] Ben-Israel, A., A. Ben-Tal, S. Zlobec: "Optimality in Nonlinear Programming: A Feasible Direction Approach", Wiley Interscience, New York, 1981.

[05] Berge, C.: "Topological spaces", MacMillan, New York, 1963.

[06] Cojocaru, I.: „Régions de stabilité dans la programmation lineaire", Utilitas Matematica 34 (1985), str. 12—21.

[07] Dorfman, R., P. A. Samuelson, R. M. Solow: "Linear Programming and Economic Analysis", McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1958.

[08] Ермин, И. И., Н. Н. Астофьев: „Введение в теорию линейного и выпуклого програмирования", Наука, Москва, 1976.

[09] Evans, J. P., F. J. Gould: "Stabilitö in Nonlinear Programming", Operations Research, 18 (1970), str. 107—118.

[10] Fiacco, A. V.: "Introduction to Sensitivity and Stability Analysis in Nonlinear Programming", Academic Press, New York, 1983.

[11] Hogan, W. W.: "Point-to-Set Maps in Mathematical Programming", Siam Review 15 (1973), str. 591—603.

[12] Huang, S.: "Regions of Stability in Input Optimization", M. Sc. Thesis, Concordia University, Montreal, 1988.

[13] Huang, S., S. Zlobec: "New Regions of Stability in Input Optimization", Aplikace Matematiky, 1988.

[14] Zlobec, S., J. Petrić: „Nelinearno programiranje", Naučna knjiga, Beograd, preuređeno i prošireno izdanje 1989.

[15] Zlobec, S.: "Characterising Optimality in Mathematical Programming Models", Acta Applicandae Mathematicae 12 (1988), str. 113—180.

[16] Zlobec, S.: "Input Optimization I: A Constructive Approach", McGill University, Montreal, 1983. (interna skripta).

[17] Zlobec, S.: "Input Optimization I: Optimal Realizations of Mathematical Models", Mathematical Programming 31 (1985), str. 245—268.

[18] Zlobec, S.: "Marginal Values for Regions of Stability in Convex Optimization", Glasnik Matematički 17 (1982), str. 197—207.

[19] Zlobec, S.: "Regions of Stability for Ill-posed Convex Programs", Aplikace Matematiky, 27 (1982), str. 176—191.

[20] Zlobec, S.: "Regions of Stability for Ill-posed Convex Programs — an addendum", Aplikace Matematiky, 31 (1986), str. 109—117.

[21] Zlobec, S.: "Stable Planning by Linear and Convex models", Mathematische Operationsforschung und Statistik, Series Optimization, 9 (1978), str. 519—535.

[22] Zlobec, S.: "A Survey of Input Optimization", Matematische Operationsforschung und Statistik, Series Optimization, 18 (1987), str. 309—348.

[23] Zlobec, S.: "Topics in Input Optimization", rad prezentiran na International Symposium on the Occasion of Professor A. Charnes 70-th Birthday, University of Texas, Austin, 1987.

[24] Zlobec, S., A. Ben-Israel: "Duality in Convex Programming: a Linearization Approach", Matematische Operationsforschung und Statistik, series Optimization, 10 (1979), str. 171—178.

[25] Zlobec, S., A. Ben-Israel: "Perturbed Convex programs: continuity of optimal solutions and optimal values", Operations Research Verfahren, XXXI, 1 (1979), str. 737—749.

[26] Zlobec, S., B. Craven: "Stabilization and calculation of the minimal index set of binding constraints in convex programming", Matematische Operationsforschung und Statistik, series Optimization, 12 (1981), str. 203—220.

[27] Zlobec, S., R. Gardner, A. Ben-Israel: "Regions of Stability for arbitrarily perturbed convex programs", u A. Fiacco (urednik): "Mathematical Programming with data perturbations", M. Dekker, New York, 1982, str. 69—89.

[28] Semple, J.: "Continuity of Mathematical Programming Models and Lagrange Multipliers", M. Sc. Thesis, McGill University, Montreal, 1986.

[29] Brunet, M.: "Numerical experimentations with Input Optimization, M. Sc. Thesis, McGill University, Montreal, 1989.

STABLE OPTIMIZATION OF CONVEX MODELS OF MATHEMATICAL PROGRAMMING — A REVIEW OF THE FIELD

Part One
LOCAL ANALYSIS OF STABILITY

Igor JEMRIĆ

Summary

In this review a survey is given of results from the field of stable optimization of convex models of mathematical processing two — level optimization (by variables of decision-making and by parametric variables) — as a qualitative new step in the devalopment of parametric programming and the theory of the conditions of optimalness. The review is in two parts. In the first, mathematical preparation is given, and also a brief exposition of the basic idea of the concept of stable optimization of models of mathematical programming, while the central part is devoted to a detailed survey of theoretical results linked with the analysis of the stability of convex models of mathematical programming. Also presented are some methods which can be used as part of this analysis.