EKONOMMSKA ANALIZA
1, XIX (1985), 75—99

SUVREMENI PRISTUP FINANCIJSKOJ MATEMATICI

*Virgilio MUŠKARDIN**

1. PREDMET FINANCIJSKE MATEMATIKE

Svaki uspješni *pristup* pretpostavlja poznavanje barem ključnih odrednica predmeta na kojeg se odnosi. Sam naziv predmeta ukazuje da je *financijska matematika* zapravo matematika primijenjena na financije. (»Finansijska matematika je grana primijenjene matematike koja se bavi proučavanjem matematičkih problema u primjeni složene kamate u privrednoj i društvenoj aktivnosti.« [2, str. III]). Ovdje se novac shvaća produktivno investiranim; »Money is always earning interest«. [1, str. 40].

Centralni je pojam financijske matematike *kapitalizacija*, a to znači varijaciju *kapitala* tijekom vremena. Suglasno istaknutom shvaćanju novca, kapitalizacija se modelira monotono rastućom funkcijom vremena. Radi se, dakle, o *modelima rasta*. Nije teško uočiti da financijski fenomeni nisu jedini koji se podvrgavaju ovim modelima. *Stoga financijsku matematiku treba misliti kao disciplinu o modelima rasta pri čemu se pojmu kapitala daje općenito značenje bilo koje veličine čija se varijacija može tako modelirati.* (»Finansijska matematika se upravo bavi matematičkom stranom privrednih i društvenih problema u čijem se rješavaju primjenjuju ili složene kamate direktno ili matematički principi na kojima se zasnivaju operacije sa složenom kamatom.« [2, str. 3]. U [2, str. 7] navodi se da glavnica šire shvaćena može biti: broj stanovnika, masa drveta, radna snaga, dohodak, kapacitet...).

2. MODELIRANJE KAPITALIZACIJE

Općenito će kapitalizacija biti dana nekom *realnom funkcijom*

$$f: t \mapsto f(t)$$

gdje je *$f(t)$ vrijednost kapitala u trenutku t.* Pri tome t varira vremenskim kontinuumom $-\infty < t < +\infty$; $t < 0$ odnosno $t > 0$ označuje vrije-

* Ekonomski fakultet, Rijeka

me prije odnosno poslije aktualnog trenutka $t = 0$. Kako je po svojoj prirodi vrijednost kapitala nenegativna veličina, f mora biti *nenegativna funkcija*, tj. $\forall t\, f(t) \geq 0$. Vrijednost $f(0)$ je *aktualna vrijednost kapitala*. Kapital koji ima aktualnu vrijednost 1 naziva se *jediničnim kapitalom*. U skladu sa ekonomskom teorijom, postulira se da je brzina kapitalizacije u trenutku t jednaka umnošku vrijednosti kapitala $f(t)$ i brzine kapitalizacije jediničnog kapitala $\varphi(t)$ u tom trenutku — *svojstvo multiplikativnosti*. Dakle,

$$\frac{df(t)}{dt} = \varphi(t) \cdot f(t) \tag{1}$$

u slučaju kontinuirane kapitalizacije, odnosno

$$\frac{\Delta f(t)}{\Delta t} = \varphi(t) \cdot f(t) \tag{2}$$

u slučaju diskretne kapitalizacije. Kako smo već istakli u uvodnom razmatranju, model kapitalizacije je model rasta. Odatle proizlazi da je

$$\varphi : t \mapsto \varphi(t)$$

pozitivna funkcija. A kako je funkcija f nenegativna, (1) odnosno (2) dosta kazuju da je f *rastuća funkcija*. Vrijednost $\varphi(t)$ nazivamo *intenzitetom rasta*. Sama funkcija f dobije se kao rješenje *diferencijalne jednadžbe* (1) odnosno *diferencijske jednadžbe* (2).

Razliku $f(t_2) - f(t_1)$ čine *kamate* za vremenski interval $[t_1, t_2]$, tj. vrijednost koju je kapital $f(t_1)$ bijući »produktivno investiranim« donio za vrijeme $t_2 - t_1$. Izraz

$$i_{t_1 t_2} = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{f(t_1)} \tag{3}$$

nazvat ćemo *relativnim kamatama*. Relativne kamate za jedinični vremenski interval $[t, t+1]$ zvat ćemo *kamatnom stopom* i označavati sa i_t,

$$i_t = \frac{f(t+1) - f(t)}{f(t)}. \tag{4}$$

Uz pretpostavku da je funkcija φ kontinuirana (uvjet rješivosti), rješenje jednadžbe (1) glasi:

$$f(t) = f(0)\, e^{\int_0^t \varphi(t)\, dt} \tag{5}$$

Svojstvo multiplikativnosti za brzinu kapitalizacije iz (1) odrazilo se kao *svojstvo multiplikativnosti* za samu kapitalizaciju u (5): vrijednost kapitala u trenutku t jednaka je umnošku aktualne vrijednosti tog kapitala i vrijednosti jediničnog kapitala u trenutku t. Uvrstimo li (5) u (3) dobijemo

$$i_{t_1 t_2} = e^{\int_{t_1}^{t_2} \varphi(t)\, dt} - 1, \tag{6}$$

iz čega zaključujemo da relativne kamate ne zavise od aktualne vrijednosti kapitala već samo od intenziteta rasta i vremenskog intervala $[t_1, t_2]$ na kojeg se odnose. Isti zaključak vrijedi dakako i za kamatnu stopu (4).

Formula (5) se u [3, 432—434] naziva općim zakonom kapitalizacije, dok je naziv *kontinuirana kapitalizacija* rezerviran, što je i inače uobičajeno, za poseban slučaj kada je intenzitet rasta konstantan. Taj je slučaj osobito značajan u primjeni i predstavlja model *prirodnog rasta* (7). Za $\varphi(t) = \lambda$, gdje je λ bilo koji realni broj, (5) daje

$$f(t) = f(0)\, e^{\lambda t} \tag{7}$$

Uočimo da u slučaju prirodnog rasta kamatna stopa (4) ne zavisi od toga na koji se vremenski interval odnosi, pa ćemo je jednostavno obilježiti sa i. Doista, u tom slučaju (6) daje

$$i = e^{\lambda} - 1. \tag{8}$$

Budući da je dimenzija parametra λ recipročna vremenu (jer vrijednost $e^{\lambda t}$ u (7) mora biti bezdimenzionalna), jasno je da će broj kojim se on iskazuje zavisiti od izbora mjerne jedinice za vrijeme. Poznajemo li vrijednost kapitala na početku i na završetku bilo kojeg jediničnog vremenskog intervala (npr. 1 godine ili 1 mjeseca), možemo prema (4) izračunati kamatnu stopu i, pa iz (8) imamo intenzitet rasta

$$\lambda = \ln(1 + i) \tag{9}$$

ili konačno

$$\lambda = \ln f(t+1) - \ln f(t)$$

u odgovarajućim mjernim jedinicama (npr. 1/god. ili 1/mj.). Uvrstimo li (9) u (7) dobit ćemo

$$f(t) = f(0) \cdot (1 + i)^t, \tag{10}$$

izraz koji dobijemo i kao rješenje diferencijske jednadžbe (2) u slučaju kada je svaki $\Delta t = 1$ i $\varphi(t) = i$.

Jednadžbu (2) možemo najopćenitije shvatiti primjenjivom na segment vremenskog kontinuuma razdijeljen na intervale $[t_k, t_{k+1}]$ općenito nejednake duljine Δt_k. Tada (2) glasi

$$\frac{f(t_k + \Delta t_k) - f(t_k)}{\Delta t_k} = \varphi(t_k) \cdot f(t_k),$$

iz čega, prema (4), slijedi da

$$i_{t_k} = \varphi(t_k)\,\Delta t_k \tag{11}$$

ima značenje kamatne stope za interval $[t_k, t_k + \Delta t_k]$. Za $k = 0, 1, \ldots, n$ (2) možemo pisati u obliku

$$f(t_0 + \sum_{k=0}^{n} \Delta t_k) = f(t_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \Delta t_k) \cdot (1 + \varphi(t_n) \cdot \Delta t_n),$$

a njezino je rješenje stepenasta funkcija dana formulom

$$f(t_0 + \sum_{k=0}^{n} \Delta t_k) = f(t_0) \cdot \prod_{k=0}^{n} (1 + \varphi(t_k)\,\Delta t_k). \tag{12}$$

Kao što smo već isktakli, osobito je interesantan i u financijskoj praksi čest slučaj vremenskih intervala jedinične duljine (najčešće 1 godina), tj. $\Delta t_k = 1$ za $k = 0, 1, \ldots, n$, uz $t_0 = 0$, pri čemu $\varphi(t_k)$ ne zavise od vremena t_k, tj. $\varphi(t_k) = i$ prema (11). Tada je (2) uobičajena homogena diferencijska jednadžba 1. reda [4, 159—160]

$$f(t + 1) = f(t) \cdot (1 + i)$$

sa rješenjem

$$f(n) = f(0) \cdot (1 + i)^n, \tag{13}$$

koje slijedi izravno iz (12).

Uobičajeno je postulirati valjanost ove formule ne samo za prirodne $(t \in N)$ već i za realne $(t \in R)$ vrijednosti argumenta t. Kako tada formula (13) prelazi u formulu (10), postulirano proširenje funkcije f je *konsistentno*.

Izraz (13) je poznati obrazac *složene kapitalizacije*. Po binomnom poučku je

$$(1 + i)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} i^k$$

što u prvoj aproksimaciji daje

$$(1 + i)^n \doteq 1 + ni. \tag{14}$$

(Graf funkcije $i \mapsto 1 + ni$ je tangenta na graf funkcije $i \mapsto (1 + i)^n$ u točki $< 0, 1 >$). Supstitucijom (14) dobijemo poznati obrazac *proste kapitalizacije*

$$f(n) = f(0) \cdot (1 + ni). \tag{15}$$

Zaključujemo da je prosta kapitalizacija *linearna aproksimacija* složene kapitalizacije; to bolja što je kamatna stopa i manja [5, str. 1]. Međutim, prema (4), kamatna stopa za (15) je

$$i_n = \frac{i}{1 + ni},$$

a prema (11) to je ujedno i intenzitet rasta. Izvršimo li proširenje sa N na R imamo

$$\varphi(t) = \frac{i}{1 + ti}, \tag{16}$$

pa uvrštavanjem u (5) dobijemo

$$f(t) = f(0) \cdot (1 + ti). \tag{17}$$

Kao što vidimo, funkcija određena formulom (17) je uobičajeno proširenje funkcije određeno formulom (15), usp. [3, str. 433]. Zanimljivo je da intenzitet rasta (16) mora opadati da bi vrijednost kapitala (17) rasla linearno.

Formula (17) se u praksi obično primjenjuje kada je $t \leq 1$: »Prosta kapitalizacija primjenjuje se redovito kod kratkoročnih financijskih operacija koje traju ispod godine dana.« [3, str. 210].

Iz izloženog o modelima (10) i (17), koji se podudaraju samo za $t = 1$, proizlazi da je (10) egzaktni model kapitalizacije, ali je aproksimativni model (17) linearan i stoga jednostavniji u primjeni. No, *pojavom elektroničkih računala ovo opravdanje za primjenu (17) postaje beznačajnim.* Suvremeni bi pristup, također, nalagao točno određivanje vremena t, umjesto dosadašnjeg zaokruživanja: »U financijskoj matematici mjesec se računa 30 a godina 360 dana.« [2, str. 10].

Razmotrimo sada problem *ispodjedinične kapitalizacije* (obično *ispodgodišnje*). To znači da su $\Delta t_k < 1$. Uvažavajući (11), u općem slučaju bismo izravno primijenili obrazac (12). Međutim, u financijskoj praksi su najčešće svi Δt_k međusobno jednaki, i svi $\varphi(t_k)$ su, također, međusobno jednaki, uz $t_0 = 0$. Neka su $\Delta t_k = \Delta t = \dfrac{1}{m}$, a $\varphi(t_k)\,\Delta t_k = i_{1/m}$ (v. (11)), gdje je m prirodni broj. Tada iz (12) slijedi

$$f(n) = f(0)\,(1 + i_{1/m})^{mn}. \tag{18}$$

Ovdje je $i_{1/m}$ *kamatna stopa za ispodjedinični interval m puta* kraći od jediničnog. Kamatna stopa i za jedinični interval je prema (4)

$$i = (1 + i_{1/m})^{m} - 1. \tag{19}$$

Ako je i godišnja kamatna stopa, ispodgodišnja kamatna stopa $i_{1/m}$ određena sa (19),

$$i_{1/m} = \sqrt[m]{1 + i} - 1, \tag{20}$$

naziva se u literaturi *konformnom kamatnom stopom*. Uvrštavanje (20) u (18) daje očekivani rezultat (13).

Uz uobičajeno poopćenje (koje (13) prevodi u (10)) formule (18), formula (20) vrijedi općenito za bilo koji realni broj m. (Razumije se da je riječ o ispodjediničnoj kapitalizaciji samo kada $m > 1$). Razvijemo li $(1 + i)^{1/m}$ u binomni red $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{1/m}{k} i^k$, koji, prema D'Alambertovom kriteriju $\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} < 1$ uz $a_k = \binom{1/m}{k} i^k$, konvergira za $i < 1$, možemo pisati

$$i_{1/m} = \sum_{k=1}^{\infty} \binom{1/m}{k} i^k, \quad i < 1;$$

što u prvoj aproksimaciji daje

$$i_{1/m} \doteq \frac{i}{m}. \tag{21}$$

Broj $\frac{i}{m}$ naziva se u literaturi *relativnom kamatnom stopom*.

Supstitucija (21) se obično primjenjuje na (18) bez adekvatnog obrazloženja, kao po sebi razumljiva ili prirodna (v. npr. [6, str. 14], [5, str. 1], [3, str. 417]). U biti ovo znači nekritičko nametanje *proporcionalnosti*, iako ona ovdje doista nije primjerena prirodi stvari. Naime, kako je relativna kamatna stopa samo linearna aproksimacija konformne kamatne stope, njezinu primjenu opravdava jedino jednostavnost obrasca (21) u usporedbi sa (20). Mogućnost široke primjene elektroničkih računala obezvrednuje i ovo opravdanje.

Nadalje, u udžbeničkoj se literaturi (v. npr. [3, 430—432] i [5, str. 2]) gotovo redovito obrazac za kontinuiranu kapitalizaciju izvodi iz obrasca za ispodjediničnu kapitalizaciju

$$f(t) = f(0) \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mt} \tag{22}$$

graničnim postupkom

$$\lim_{m\to\infty} \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mt}.$$

Istaknimo (iako to autori dotičnih udžbenika ne ističu) da je rezultirajući obrazac

$$f(t) = f(0)\, e^{it} \tag{23}$$

samo aproksimativno točan, što je isključivo posljedica aproksimativne točnosti obrasca (22) u kojem figurira relativna umjesto konformne kamatne stope. Naime, usporedimo li formule (23) i (7) vidimo da u (23) kamatna stopa i stoji na mjestu intenziteta rasta λ u (7). Točan odnos između i i λ dan je formulom (9). Razvijemo li $\ln(1 + i)$ u MacLaurinov red, vidjet ćemo da je i prva aproksimacija od λ, upravo kao što je $\frac{i}{m}$ prva aproksimacija od $i_{1/m}$ (v. (20)). MacLaurinov red za $\lambda = \ln(1 + i)$ je alternirajući red

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{(k)}(0)}{k!} i^k = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \cdot \frac{i}{k} i^k,$$

koji prema Leibnizovom kriteriju [7, str. 93] konvergira ako

$$\frac{i^k}{k} > \frac{i^{k+1}}{k+1} \text{ za svaki } k = 1, 2, \ldots, \text{ i } \lim_{k\to\infty} \frac{i^k}{k} = 0,$$

a to je ispunjeno za $i \leq 1$. Stoga možemo pisati

$$\lambda = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \cdot \frac{1}{k} i^k, \quad i \leq 1;$$

što u prvoj aproksimaciji daje

$$\lambda \doteq i.$$

Primjetimo da je model (23) kvalitativno ispravan (eksponencijalna funkcija), te da bi bio i kvantitativno ispravan kada bi se parametar i interpretirao kao intenzitet rasta. Ali, tada se parametar i ne bi smio interpretirati kao kamatna stopa, a upravo se to čini. Kao posljedica javlja se zbrka u primjeni: isti se zadatak ponekad rješava formulom (23), a ponekad formulom (10). Ova se zbrka umjetno izbjegava tako da se u samom tekstu zadatka izričito određuje model koji treba primijeniti, kao npr. »izračunati metodom kontinuiranog ukamaćivanja« [3, str. 431]; umjesto da sama priroda zadatka diktira koji model treba primijeniti.

Recimo još, da se obrazac za kontinuiranu kapitalizaciju izvodi na upravo opisani način ((22) — (23)) gotovo redovito, ali ipak ne redovito. Tako se on u [8, 310—311] korektno izvodi kao rješenje diferencijalne jednadžbe $f'(t) = \lambda f(t)$.

3. FINANCIJSKA EKVIVALENTNOST KAPITALA

Na osnovi dosadašnjih razmatranja zaključujemo da se uz konstantan intenzitet rasta opće zakonitosti (5) i (12) reduciraju na samo dvije formule kao egzaktne modele kapitalizacije, (7) i (10). Ove se pak, posredstvom (9), iskazuju kao dva zapisa istog modela rasta. Stoga ćemo naša daljnja razmatranja usredotočit na formulu (10), koju ćemo pisati u obliku

$$f(t) = f(0) \cdot r^t, \tag{24}$$

gdje je $r = 1 + i$ tzv. dekurzivni *kamatni faktor*. Držim da Car [3, str. 415] izriče suštinu temeljnog principa financijske matematike — *principa financijske ekvivalentnosti kapitala* — kada tvrdi da (24) izražava financijsku ekvivalentnost kapitala $f(0)$ u trenutku 0 i $f(t)$ u trenutku t. Isto tako, držim da slijedeće dvije »definicije« ne pogađaju bit već posljedice ovog principa. To su: »Njen osnovni princip je princip ekvivalencije koji označava jednakost vrijednosti uplata i budućih isplata u istom trenutku.« [2, str. III]; »Zbroj svih potraživanja (isplata) svedenih na neki po volji odabrani termin mora biti jednak zbroju svih dugovanja (uplata) svedenih na isti termin.« [9, str. 301].

Iz (24) izravno izvodimo formulu

$$f(t_2) = f(t_1)\, r^{t_2 - t_1} \tag{25}$$

koja izražava financijsku ekvivalentnost kapitala $f(t_1)$ i $f(t_2)$ sa dospijećima t_1 i t_2 respektivno, uz pretpostavku da režim kapitalizacije diktira (unaprijed utvrđeni) kamatni faktor r. Formulom (25) prirodno je inducirana *definicija relacije financijske r-ekvivalencije*, simbolički $\underset{r}{\approx}$:

$$f(t_1) \underset{r}{\approx} f(t_2) \quad \text{ako} \quad f(t_2) = f(t_1)\, r^{t_2 - t_1}. \tag{26}$$

Dosljedno ovoj definiciji razumijevamo da *princip financijske ekvivalentnosti kapitala objedinjuje sve relacije financijske r-ekvivalencije* $(r > 1)$.

Pomoću definicije (26) lako provjeravamo tvrdnju: *relacija financijske r-ekvivalencije je relacija ekvivalencije*, tj. ima svojstva:

(i) $f(t) \underset{r}{\approx} f(t)$, (refleksivnost);

(ii) $f(t_1) \underset{r}{\approx} f(t_2) \Rightarrow f(t_2) \underset{r}{\approx} f(t_1)$, (simetričnost);

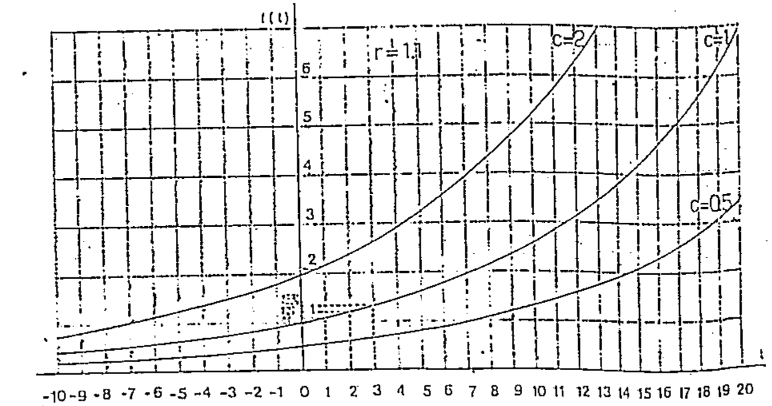
(iii) $f(t_1) \underset{r}{\approx} f(t_2) \wedge f(t_2) \underset{r}{\approx} f(t_3) \Rightarrow f(t_1) \underset{r}{\approx} f(t_3)$, (tranzitivnost).

Očito, *svaka klasa financijske r-ekvivalencije je jednoznačno reprezentirana aktualnom vrijednošću kapitala*. Doista, pišući (24) kao $f_C(t) = Cr^t$, trivijalno pokazujemo:

(i) $\forall t\, (C \underset{r}{\approx} f_C\, t))$,

(ii) $f_{C_1}(t_1) \underset{r}{\approx} f_{C_2}(t_2) \Rightarrow C_1 = C_2$.

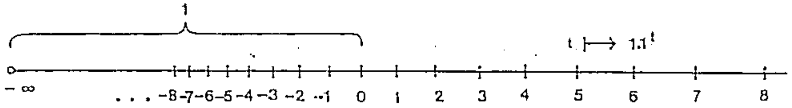
Grafički gledano, svaka relacija $\underset{r}{\approx}$ vrši jednu particiju poluravnine $\Gamma_{R \times R^+}$ na krivulje $\Gamma_{t \mapsto f_C(t)}$, (»Γ« stoji za »graf«), slika 1.



Slika 1.

Za zadano $C = f(0)$ klasu funkcijske r-ekvivalencije možemo grafički predočiti *funkcijskom skalom* na pravcu; od ishodišne točke nanose se dužine duljina $f(t)$ a na krajeve tih dužina upisuju se odgovarajuće vrijednosti argumenta t [10, 11—53]. Očito je kako se funkcijska skala može konstruirati iz grafa odgovarajuće funkcije. Na slici 2.

prikazana je funkcijska skala za $C = 1$ i $r = 1.1$, koju smo mogli konstruirati pomoću grafa funkcije $t \mapsto 1.1^t$ iz slike 1. (skala na sl. 2. je uvećana u odnosu na dužine duljina $f(t)$ na sl. 1).



Slika 2.

Funkcijske skale (sl. 2) i mrežasti nomogrami (sl. 1) veoma su pogodna grafička sredstva za brzo očitavanje (približnih) vrijednosti funkcije f. Glavni im je nedostatak što ih nije lako konstruirati. Osim toga, za svaku aktualnu vrijednost kapitala $C = f(0)$ i svaki kamatni faktor r mora se konstruirati posebna funkcijska skala, odnosno posebna krivulja u $t - f(t)$ dijagramu. Pokazat ćemo kako se primjenom teorije *mrežastih nomograma* [10, 55—88] ovi nedostaci mogu prevladati. Time ćemo ukazati na mogućnosti praktične primjene nomograma u funkcijskoj matematici.

Teškoće koje smo istakli u vezi sa konstrukcijom grafičke predodžbe kapitalizacije f posljedice su ovih činjenica:

(i) funkcija f nije linearna već eksponencijalna;
(ii) f nije funkcija jednog već triju argumenata: $f(0)$ r, t. Ove probleme rješavamo

(i) primjenom *anamorfoze* [10, 57—60],
(ii) konstrukcijom *dvostrukog mrežastog nomograma* [10, 84—87].

Formulu (24),

$$\frac{f(t)}{f(0)} = r^t,$$

u kojoj se javljaju 4 varijable, možemo uvođenjem pomoćne varijable α zamijeniti ekvivalentnim sistemom formula

$$\frac{f(t)}{f(0)} = \alpha \qquad (26)$$

i

$$r^t = \alpha, \qquad (27)$$

takvih da se u svakoj javljaju po 3 varijable. Za svaku od funkcija zadanih formulama (26) i (27) možemo konstruirati mrežasti nomogram, smatrajući po jednu varijablu parametrom ($f(0)$ u (26), r u (27)).

Sastavljanjem ovih mrežastih nomograma tako da im skala α bude zajednička, dobijemo dvostruki mrežasti nomogram funkcije f.

»Anamorfozom nazivamo postupak kojim se promjenom skale na osima krivulja transformira u pravac.« [10, str. 57]. Tim se postupkom (ako je primjenjiv) sistem krivulja transformira u sistem pravaca. Budući da je (27) jednadžba jednoparametarske obitelji krivulja (parametar r), navodimo *potreban* i *dovoljan* uvjet da obitelj krivulja $F(t, \alpha, r) = 0$ dopušta anamorfozu [10, str. 74]. Taj uvjet glasi:

$$\frac{\dfrac{\partial F}{\partial t}}{\dfrac{\partial F}{\partial \alpha}} = M(t)\cdot N(\alpha)\cdot R(r) \qquad (28)$$

gdje su M, N, R funkcije jednog argumenta. Jednadžbe anamorfoze (jednadžbe funkcijskih skala novog koordinatnog sustava) imaju oblik

$$u = \int_a^t M(t)\,dt \quad \text{i} \quad v = \int_b^\alpha \frac{1}{N(\alpha)}\,d\alpha, \qquad (29)$$

gdje je $\langle a, b \rangle$ ishodište novog koordinatnog sustava. Kako za $F(t, \alpha, r) = \alpha - r^t = 0$,

$$\frac{\dfrac{\partial F}{\partial t}}{\dfrac{\partial F}{\partial \alpha}} = r^t \ln r = \alpha \ln r,$$

(27) ispunjava uvjet (28), gdje $M(t) = 1$, $N(\alpha) = \alpha$, $R(r) = \ln r$. Koordinatni početak bit će točka $\langle 0, 1 \rangle$, jer za $t = 0$, $f(t) = f(0)$ tj. $\alpha = \dfrac{f(t)}{f(0)} = 1$. Stoga, prema (29),

$$u = \int_0^t 1\cdot dt = t \quad \text{i} \quad v = \int_1^\alpha \frac{1}{\alpha}\,d\alpha = \ln \alpha,$$

tj. jednadžbe anamorfoze su

$$u = t \quad \text{i} \quad v = \ln \alpha. \qquad (30)$$

(30) u sprezi sa (27) doista daje jednadžbu jednoparametarske obitelji pravaca.

$$v = \ln r \cdot u.$$

Dakle, na os apscisa nanosimo ravnomjernu a na os ordinata logaritamsku funkcijsku skalu. Tada koordinatni pravci čine tzv. polulogaritamsku *funkcijsku mrežu;* koja se tiska (i prodaje) u vidu polulogaritamskih *funkcijskih papira.*

Na (26) nije potrebno primjeniti anamorfozu jer je to upravo jednadžba jednoparametarske obitelji pravaca (parametar $f(0)$). Međutim, da bi skala na osi ordinata bila zajednička (dvostruki mrežasti nomogram!) moramo (26) logaritmirati (usp. (30)). Rezultirajuća jednadžba

$$\ln f(t) - \ln f(0) = \ln \alpha$$

se preko jednadžbi funkcijskih skala

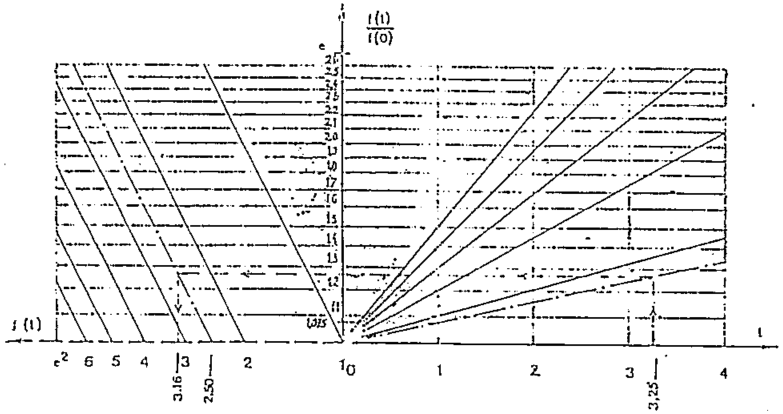
$$v = \ln \alpha \quad \text{i} \quad w = \ln f(t) \tag{31}$$

transformira u jednadžbu

$$w = v + \ln f(0)$$

koja je također jednadžba jednoparametarske obitelji pravaca. Budući da je $v = w = 0$ kada $\alpha = 1$ i $f(t) = 1$, koordinatni početak bit će sada točka $<1, 1>$. Iz (31) vidimo da su ovdje obje funkcijske skale logaritamske, što znači da (26) predočujemo na logaritamskom papiru.

Opisanim postupkom došli smo do nomograma funkcije f, slika 3, traženih svojstava.



Slika 3.

Iako su u lijevoj funkcijskoj mreži obje funkcijske skale logaritamske s istom bazom e, iz praktičnih razloga crtane su sa različitim

modulima (s obzirom na omjer duljina njihovih inicijalnih segmenata čestih u primjeni). U sustavu $t <0,1> \dfrac{f(t)}{f(0)}$ imamo obitelj konkurentnih pravaca, za koje pripadnu vrijednost parametra r izravno očitavamo na pomoćnom (na sl. 3 iscrtkanom) pravcu $t = 1$, (tada $\dfrac{f(t)}{f(0)} = r$). U sustavu $\dfrac{f(t)}{f(0)} <1, 1> f(t)$ imamo obitelj paralelnih pravaca za koje pripadnu vrijednost parametra $f(0)$ izravno očitavamo na osi $f(t)$ (na sl. 3. iscrtkanoj), tj. pravcu $\dfrac{f(t)}{f(0)} = 1$, (tada $f(t) = f(0)$).

Na slici 3. ucrtani su nomogrami samo za mali broj funkcija iz čitave dvoparametarske obitelji funkcija f. Činjenica da su ovi nomogrami pravčasti omogućuje lako ucrtavanje nomograma bilo koje funkcije iz ove obitelji. Tako je na slici 3. ucrtan nomogram funkcije $t \mapsto 2.5 \cdot 1.075^t$. To smo izveli tako da smo u obitelji konkurentnih pravaca povukli pravac kroz točku $< 1, 1.075 >$, a u obitelji paralelnih pravaca povukli smo pravac kroz točku $< 1, 2.5 >$. Zaključujemo da bi bilo dovoljno tiskati papire sa opisanom dvostrukom funkcijskom mrežom, a korisnik bi lako sam ucrtao upravo one pravce nomograma koji mu (najčešće) trebaju. Nomogrami sa $r = 1.075$, kao u navedenom primjeru, mogli bi poslužiti štedionicama (štednja po viđenju) za brzu procjenu: na primjer, ulog od din. 25.000.— narast će za 3 godine i 4 mjeseca na cca din. 31.600.— (točnije din. 31.624.—), v. sl. 3. Točnost ucrtavanja i očitavanja zavisi dakako od gustoće funkcijskih mreža.

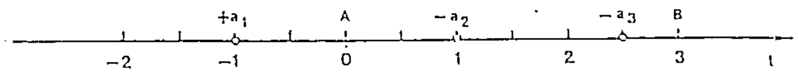
Promatranjem nomograma na slici 3. nije teško uočiti da se, i kako se, pomoću njega može odrediti bilo koja od četiri veličine

$$f(t), f(0), r, t$$

ako su preostale tri zadane. Doduše, ovo je određenje samo približna ocjena ali zato brza i zorna. Za točnije izračunavanje morat ćemo upotrijebiti elektroničko računalo. Zapravo, svaki džepni »scientific calculator« je više nego dovoljan za ova izračunavanja.

4. DODAVANJE I ODUZIMANJE KAPITALA

Dosad smo promatrali kako se mijenja vrijednost *jednog* kapitala u zavisnosti od vremena. Sada ćemo razmatrati kako se vrijednosti *više* kapitala objedinjuju operacijama *dodavanja* i *oduzimanja* kapitala. Dodavanje kapitala nazivamo *uplatom,* a oduzimanje *isplatom.* Svaka uplata odnosno isplata zbiva se u određenom vremenskom trenutku i, budući da se podvrgava kapitalizaciji, samo u tom trenutku ima naznačenu *nominalnu* vrijednost. Sve uplate i isplate zorno predočujemo u *vremenskom dijagramu,* upisujući njihove vrijednosti a_i, sa predznakom $+$ za uplatu odn. predznakom $-$ za isplatu, uz odgovarajuće točke vremnske osi, slika 4. (primjer). Objedinjavanje ovih uplata i isplata



Slika 4.

vrši se u određenom trenutku, dodavanjem odnosno oduzimanjem njihovih vrijednosti upravo u tom trenutku. Kažemo da smo kapitale sveli na *zajedničko dospijeće*, primjenom principa financijske ekvivalentnosti kapitala. Postupak ćemo ilustrirati na primjeru sa slike 4. Izračunat ćemo (ukupne) vrijednosti kapitala $a_i = 1, 2, 3$), A u trenutku $t = 0$ i B u trenutku $t = 3$.

U najopćenitijem slučaju svaki se kapital a_i kapitalizira po vlastitom promjenljivom kamatnom faktoru $r_i(t)$. Tada

$$A = a_1r_1^{1} - a_2r_2^{2} - a_3r_3^{0.5},$$

$$B = a_1r_1'^{1} - a_2r_2'^{2} - a_3r_3'^{0.5},$$

gdje su r_i, r_i' $(i = 1, 2, 3)$ odgovarajući prosječni kamatni faktori izračunati iz (5) odnosno (12) kako slijedi.

$$a\,e^{\int_0^t \ln r(t)\,dt} = ar^t \Rightarrow r = e^{\frac{\int_0^t \ln r(t)\,dt}{i}}$$
$$(\varphi(t) = \ln r(t),\ v.\ (9)). \tag{32}$$

$$a\prod_{k=0}^{n} r(t_k)\,\Delta t_k = ar^t \Rightarrow r = e^{\frac{\sum_{k=0}^{n} \ln r(t_k)\,\Delta t_k}{t}}$$

$$(1 + \varphi(t_k) = r\,t_k),\quad \sum_{k=0}^{n} \Delta t_k = t).$$

Iz ovih se formula vidi da će općenito biti $r_i \neq r_i'$, jer se odnose na različite vremenske intervale. Iz jednadžbe $B = Ar^3$ možemo odrediti prosječni kamatni faktor r za A. Međutim, značenje faktora r nije osobito s obzirom da ne zavisi samo od vremena t, već bitno zavisi od vrijednosti kapitala a_i i njihovih kamatnih faktora $r_i(t)$.

U slučaju da se na sve kapitale a_i primjenjuje isti varijabilni kamatni faktor $r(t)$, tj. da $r(t)$ zavisi samo od t, možemo naći prosječne kamatne faktore (32) po vremenskim intervalima. Neka su r_1, r_2, r_3, r_4, r_5 prosječni kamatni faktori za vremenske intervale (—1, 0), (0, 1), (1, 2), (2, 2.5), (2.5, 3) respektivno. Tada

$$A = a_1r_1 - a_2r_2^{-1} - a_3r_4^{-0.5}\,r_3^{-1}\,r_2^{-1},$$
$$B = a_1r_1r_2r_3r_4^{0.5}\,r_5^{0.5} - a_2r_3r_4^{0.5}\,r_5^{0.5} - a_3r_5^{0.5}, \tag{33}$$

i

$$B = Ar_2r_3r_4^{0.5}\,r_5^{0.5}.$$

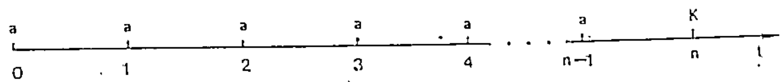
Veoma je čest slučaj da je kamatni faktor r konstantan. (U udžbeničkoj literaturi se uglavnom obrađuje samo taj slučaj.) Tada treba samo u izrazima (33) staviti

$$r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = r_5 = r:\ A = a_1r - a_2r^{-1} - a_3r^{-2.5},$$

$$B = a_1r^4 - a_2r^2 - a_3r^{0.5};\ B = Ar^3.$$

Iz prezentiranih ilustracija *biva jasnim kako se, posredstvom vremenskog dijagrama, modelira bilo koji slučaj dodavanja ili oduzimanja kapitala.* Naravno, ukoliko postoje neke dodatne pravilnosti, kao što je npr. periodičnost uplata odnosno isplata jednakih visina, mogu se one iskoristiti za daljnje pojednostavljenje algebarskog zapisa modela. Ovo pojednostavljenje je tim važnije čim je broj uplata odnosno isplata veći.

U praksi se najčešće srećemo s periodičnim uplatama ili periodičnim isplatama jednakih visina, recimo a, koje se kapitaliziraju po konstantnom kamatnom faktoru r, slika 5.



Slika 5.

Za jedinični vremenski interval obično uzimamo period između dvije uplate ili isplate. Ovi su slučajevi detaljno obrađeni u svakom udžbeniku financijske matematike; toliko detaljno da se često ispušta iz vida da se zapravo radi o različitim interpretacijama istog modela. Same uplate ili isplate nazivaju se još, zavisno od interpretacije, *ratama* ili *anuitetima*. »Naime, s računske točke gledišta nema nikakve razlike između uloga, rente ili anuiteta u užem smislu.« [5, str. 3]. Primjenjujući princip financijske ekvivalentnosti kapitala na svaku ratu, možemo izračunati vrijednost svih rata u bilo kojem trenutku. Za vrijednost K svih rata nakon n perioda (sl. 5.) dobijemo dobro poznati obrazacac

$$K = ar\frac{r^n - 1}{r - 1}. \tag{34}$$

Primjetimo da ovdje anamorfoza nije primjenjiva jer (34) ne ispunjava uvjet (28). Pomoću kalkulatora možemo, sa zadovoljavajućom točnošću odrediti bilo koju od četiri veličine

K, a, r, n

ako su preostale tri zadane. Međutim, dok K, a i n možemo lako eksplicirati,

$$n = \frac{1}{\ln r} \cdot \ln \left(\frac{K}{a} \cdot \frac{r-1}{r} + 1 \right),$$

izračunavanje r vodi na rješavanje algebarske jednadžbe n-tog reda:

$$r^n + r^{n-1} + \ldots + r = \frac{K}{a} \tag{35}$$

($(r^n - 1)$ podjelili smo sa $(r-1)$, jer po pretpostavci $r \neq 1$).

5. RJEŠAVANJE JEDNANDŽBE (35)

Dobro je poznato da algebarske jednadžbe 5. i višeg reda općenito nisu *rješive pomoću radikala*, tj. da se njihovi korijeni ne mogu dobiti iz koeficijenata pomoću konačno mnogo algebarskih operacija (dodavanja, oduzimanja, množenja, dijeljenja, potenciranja i radiciranja); v. npr. [11]. One se stoga rješavaju aproksimativno raznim numeričkim metodama. Pokazat ćemo kako se *koristeći mogućnosti kalkulatora* dolazi *do rješenja* željene točnosti *jednostavnim »eksperimentiranjem«*, bez primjene sofisticiranih numeričkih metoda. Mi ćemo doduše rješavati jednadžbu (35), ali će izloženi postupak imati vrijednost jedne *opće metodologije rješavanja jednadžbi kalkulatorom.*

Budući da, prema definiciji kamatnog faktora, $r > 1$, zanima nas samo takvo rješenje jednadžbe (35). Ono je moguće ako $K > na$; ili uz

oznaku $\frac{K}{a} = c$,

$$c > n. \tag{36}$$

Kako

$$r > 1 \Rightarrow r^k \geq r, \; k = 1, \ldots, n,$$

uz pretpostavku (36), (35) implicira $nr < c$; dakle

$$1 < r < \frac{c}{n}. \tag{37}$$

Traženo rješenje jednadžbe (35) je nula funkcije s zadane formulom

$$s(r) = \sum_{k=1}^{n} r^k - c, \; c > n. \tag{38}$$

Slijedeće razlaganje pokazuje da *postoji jedinstvena* nula r_s funkcije s koja zadovoljava (37). Postojanje proizlazi iz činjenice da je s kontinuirana funkcija, te da

$$s(1) = n - c < 0,$$

zbog (36), a

$$s\left(\frac{c}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{c}{n}\right)^k - c > 0,$$

što uviđamo ovako:

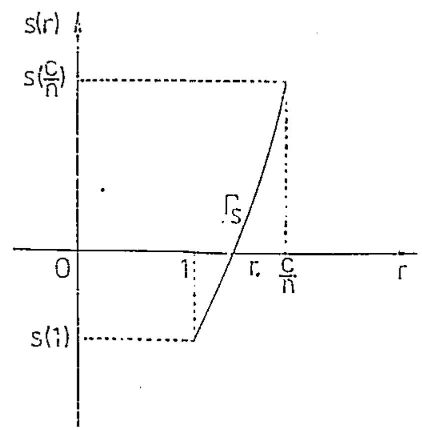
$$\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{c}{n}\right)^k > n - 1, \text{ jer } \frac{c}{n} > 1 \text{ (36), tj.}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{c}{n}\right)^k > n / \cdot \frac{c}{n} \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{c}{n}\right)^k > c.$$

Jedinstvenost proizlazi iz činjenice

$$r > 0 \Rightarrow s'(r) = \sum_{k=1}^{n} k r^{k-1} > 0,$$

tj. za $r > 0$ s je strogo rastuća funkcija, slika 6.



Slika 6.

Preostaje da izračunamo r_0 takvo da $s(r_0) = 0$ (38). Sam postupak »eksperimentiranja« pomoću kalkulatora pokažimo na primjeru

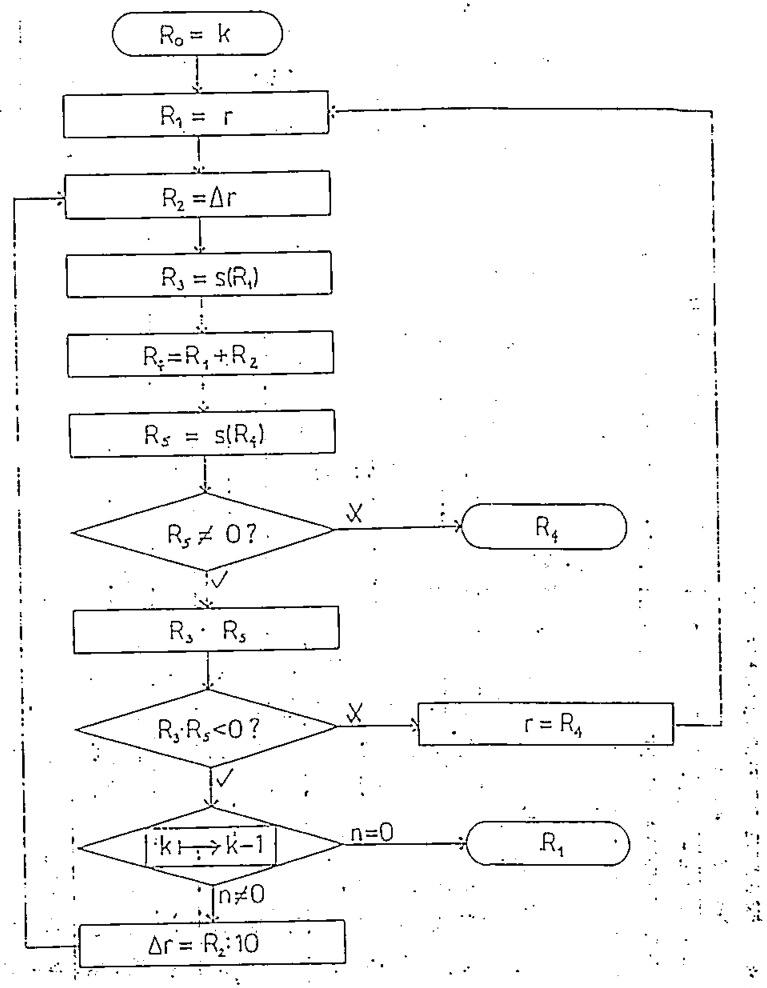
$$s(r) = r^5 + r^4 + r^3 + r^2 + r - 10 = 0. \qquad (39)$$

Prema (37), $1 < r_0 < 2$; što je u praksi najčešći slučaj. Dakle, $r_0 = 1.\cdots$. Sada određujemo decimalu po decimalu. Kalkulatorom izračunavamo $s(1.1)$, $s(1.2), \ldots$ i nalazimo da je $s(1.2) < 0$, a $s(1.3) > 0$. rPema tome, prva decimala je 2. Sada izračunavamo $s(1.21)$, $s(1.22), \ldots$ i nalazimo da je $s(1.24) < 0$ a $s(1.25) > 0$. Stoga je druga decimala 4. Dalje nalazimo da je $s(1.241) > 0$, pa je treća decimala 0. Na isti način utvrđujemo da je četvrta decimala 7. Dakle, $r_0 \doteq 1.2407$. Tada je $s(r_0) \doteq -0.0006427391$, što se od 0 razlikuje tek u trećoj decimali. Želimo li bolju aproksimaciju, nastavljamo opisanim postupkom najviše do toliko decimala koliko ih stane na ekran kalkulatora.

Izloženi postupak se može znatno ubrzati upotrebom *programabilnog kalkulatora.* Time se ujedno smanjuje mogućnost pogreške pri unošenju (utipkavanju) brojčanih podataka i operacijskih instrukcija, jer ovo nije potrebno višekratno ponavljati. Slijedeći u suštini opisani algoritam za rješavanje jednadžbi pomoću kalkulatora, konstruirat ćemo *program* za programabilni kalkulator *Texas Instruments SR-56.* Ovaj se program bitno razlikuje od programa »Zeros of Functions« u [12, 21—24] koji se temelji na metodi bisekcije. Naš program je jednostavniji, kraći (koristi manji broj lokacija u programskoj memoriji) i uopće elegantniji je, te brže konvergira. On se bitno razlikuje i od posebnog programa »Ordinari Annuity (Interest Rate Unknown)« u [12, 80—82], koji je još duži.

Dijagram tijeka programa (flow-chart) prikazuje slika 7. R_i označuje i-ti registar memorije, odnosno njegov sadržaj. U R_0 unosimo broj k znamenaka rezultata koliko ih kalkulator treba odrediti. Početnu vrijednost za r unosimo u R_1, dok u R_2 unosimo dekadsku jedinicu koja odgovara dekadskoj poziciji cifre koju određujemo. Zatim se posebnom subrutinom izračunava vrijednost funkcije s čiju nulu tražimo i rezultat unosi u R_3. Dalje je sve jasno iz samog dijagrama, osim možda treće operacije grananja koja je ujedno i brojač. To je moćna *dsz* (Decrement and Skip on Zero) instrukcija, kojom se za po 1 umanjuje vrijednost u R_0 i program se grana dok u R_0 ne bude 0. Sam program je dokumentiran na standardnom SR-56 obrascu.

Uz program za nalaženje nule funkcije napisan je i program za izračunavanje vrijednosti



Slika 7.

$$r^6 - 11r + 10$$

koja, uz $r > 1$, postaje 0 upravo za rješenje r_0 zadane jednadžbe (39); usp. (34). Time je podprogram znatno skraćen, ali uz ograničenje da niz aproksimacija ne smijemo započeti sa 1. Za $k = 8$ možemo startati sa $r = 1.000000001$ i $\Delta r = 0.1$. Kalkulator daje rješenje jednadžbe (39) na 8 decimala:

$$r_0 \doteq 1.24072329.$$

CODING FORM ~ KODEFORM ~ FEUILLE DE PROGRAMMATION

TITLE/TITEL/TITRE Zero of Function $s(r) = r^5 + r^4 + r^3 + r^2 + r - 10$ PAGE/SEITE/PAGE 1 OF/VON/DE I

PROGRAMMER/PROGRAMMIERER/PROGRAMMEUR V. Muškardin DATE/DATUM/DATE 10. 04. 82.

Loc. Adr. Adr.	Code Kode Code	Key Taste Touche	Comments Bemerkungen Commentaires	Loc. Adr. Adr.	Code Kode Code	Key Taste Touche	Comments Bemerkungen Commentaires	Loc. Adr. Adr.	Code Kode Code	Key Taste Touche	Comments Bemerkungen Commentaires	Loc. Adr. Adr.	Code Kode Code	Key Taste Touche	Comments Bemerkungen Commentaires
00	33	STO	Programme	25	04	4		50	54	÷		75	58	*rtn	
01	01	1		26	41	R/S		51	01	1		76			
02	57	*subr		27	42	RST		52	00	0		77			
03	05	5		28	64	×		53	94	=		78			
04	09	9		29	34	RCL		54	33	STO		79			
05	33	STO		30	03	3		55	02	2		80			
06	03	3		31	94	=		56	22	GTO		81			
07	34	RCL		32	12	INV		57	00	0		82			
08	01	1		33	47	*x≥t		58	07	7		83			
09	84	+		34	04	4		59	33	STO	Function	84			
10	34	RCL		35	01	1		60	06	6		85			
11	02	2		36	34	RCL		61	34	RCL		86			
12	94	=		37	04	4		62	06	6		87			
13	33	STO		38	22	GTO		63	45	y^x		88			
14	04	4		39	00	0		64	06	6		89			
15	57	*subr		40	00	0		65	74	—		90			
16	05	5		41	27	*dsz		66	01	1		91			
17	09	9		42	04	4		67	01	1		92			
18	33	STO		43	08	8		68	64	×		93			
19	05	5		44	34	RCL		69	34	RCL		94			
20	12	INV		4	01	1		70	06	6		95			
21	37	*x=t		46	41	R/S		71	84	+		96			
22	02	2		47	42	RST		72	01	1		97			
23	08	8		48	34	RCL		73	00	0		98			
24	34	RCL		49	02	2		74	94	=		99			

Registers Register Mémoire
0 k
1 Used
2 Δr
3 Used
4 Used
5 Used
6 Used/subr.
7
8
9

NOTES
ANMERKUNGEN
NOTES

$k \leq 10$;

$10^i \leqslant r \leqslant 10^{i+1}$

$\Rightarrow \Delta r = 10^i, i \leqslant j$

Subr. for s (r)
is adequate
when $r \neq 1$.

1976 Texas Instruments *Denotes 2 nd function key

USER INSTRUCTIONS ~.BENUTZER INSTRUKTIONEN ~ MODE D'EMPLOI

TITLE/TITEL/TITRE Zero of Function PAGE/SEITE/PAGE 2 OF/VON/DE I

PROGRAMMER/PROGRAMMIERER/PROGRAMMEUR V. Muškardin DATE/DATUM/DATE 10. 04. 82.

Step Shritt Sequece	PROCEDURE — PROZEDUR — PROCEDURE	ENTER EINGABE INTRODUIRE	PRESS BEFEHL APPUYER SUR				DISPLAY ANZEIGE AFFICHAGE
1	Reset programme counter		RST				
2	Enter learn mode		LRN				00 00
3	Enter programme						
4	Enter function	s (r)					
5	Return to calculate mode		LRN				
6	Reset programme counter		RST				
7	Clear memory registers		*CMs				
8	Accuracy (no. of figures)	k	STO	0			k
9	Decimal unit (interval)	Δ r	STO	2			Δ r
10	Enter initial (zero) value	r					r
11	Calculate terminal (zero) value		R/S				r_0
12	For a new calculation return to Step 6						
13	For another function:						
	Enter function		GTO	5	9	LRN	
		f (r)	*rtn				
	Then return to Step 5						
N. B.	Before running the programme ensure that						
	a zero does exist in the respective interval.						
	Otherwise the programme might not halt.						

1976 Texas Instruments *Denotes 2nd function key

Tada $s(r_0) \doteq -0.000000229$ što je mnogo bolja aproksimacija od 0 nego što je u praksi obično trebamo.

Razvijeni program može se upotrebom programabilnog kalkulatora sa eksternom memorijom, npr. sa magnetnim karticama kao SR-52, trajno spremiti. Još jednostavnije, posebni financijski kalkulatori mogu imati funkciju *s* predprogramiranu.

6. KALKULATOR VERSUS FINANCIJSKE TABLICE

Mnogi diplomirani ekonomisti će uz pojam financijske matematike asocirati (gotovo kao sinonim) pojam *financijskih tablica I—IV*. Podsjetimo se, tu su tabelirane funkcije

$$t \mapsto r^t \quad \text{i} \quad t \mapsto v^t \quad \text{u I i II tablicama,}$$

$$n \mapsto r\frac{r^n - 1}{r - 1} \quad \text{i} \quad n \mapsto v\frac{v^n - 1}{v - 1} \quad \text{u III i IV tablicama,}$$

gdje je $v = \dfrac{1}{r}$ *diskontni kamatni faktor;*

V tablice sadrže recipročne vrijednosti IV tablica, a VI su analogon V za *anticipativno ukamaćivanje*. U ovom se članku posebno ne bavimo anticipativnim ukamaćivanjem, jer se sve razmatranja provode potpuno analogno onima za dekurzivno ukamaćivanje. Također, ne govorimo o diskontnom računu jer se on sa matematičkog stajališta ne razlikuje od kamatnog računa. Usp. npr. [3].

Jasno da su financijskim tablicama obuhvaćene vrijednosti navedenih funkcija samo za neke vrijednosti parametra *r* i argumenta *t*, a i ove samo približno na određeni broj decimala. Iz ovog, po prirodi stvari nužnog, ograničenja izviru bitni *nedostaci financijskih tablica*. Kontrastirat ćemo ih sa odgovarajućim *prednostima kalkulatora*.

1. Tabelirane funkcije nisu dostatne za modeliranje čitave *raznolikosti financijske prakse*. »U svakoj analizi ne može se usvojiti pretpostavka o konstantnim prinosima, troškovima, anuitetima i sličnim ekonomskim veličinama.« [5, str. 12]. U [2] su obrađeni slučajevi kada isplate čine aritmetički ili geometrijski niz. U [5] je uveden pojam varijabilnog anuiteta i obrađen slučaj kada je anuitet linearna funkcija vremena. U ovom smo članku krenuli od najopćenitijeg polazišta. Svi se ti slučajevi mogu uspješno rješavati elektroničkim kalkulatorom.

2. Da bi se odredile netabelirane vrijednosti tabeliranih funkcija potrebno je primjeniti postupak *interpolacije* i *ekstrapolacije*. Primjena ovih postupaka, uz pogreške koje nužno nosi, ograničenog je dosega i zahtijeva nezanemariv utrošak vremena. U udžbeničkoj literaturi se uz financijske tablice redovito izlaže linearna interpolacija, kao i mnoge dosjetke za »prevladavanje« spomenutih ograničenja, v. [3, str. 425], [9, 425—436] i osobito [2]. Sve je to divno za predkalkulatorsko vrije-

me ali sada postaje naprosto nepotrebnim. Dakako, interpolacija zadržava svoju vrijednost, ali u drugom kontekstu.

3. Upotrebom kalkulatora možemo raditi mnogo *preciznije* jer nas »nepotrebne« znamenke ne opterećuju, pa zaokruživanje vršimo tek u konačnom rezultatu. Prerana zaokruživanja uvjetuju akumulaciju pogrešaka a mogu dovesti i do pogrešnih zaključaka — kao u [1, str. 44]. Da bismo tu kardinalnu grešku Ayresa objasnili podimo od modela sa sl. 5. Neka su poznate uplate a a nepoznata isplata K. U (34) smo K odredili formiranjem »jednadžbe vrijednosti« (»values equation« u [1]) za trenutak $t = n$. Isti bismo rezultat dobili svođenjem ovih kapitala na bilo koji trenutak; npr. svođenjem na $t = 0$, K dobijemo iz

$$Kr^{-n} = a \frac{r^{-n} - 1}{r^{-1} - 1};$$

što je u samoj biti principa financijske ekvivalentnosti kapitala. Međutim, suprotno ovome Ayres tvrdi da promjena datuma svođenja (»focal time u [1]) izaziva i promjenu u rezultatu. Tvrdnju potkrepljuje sa dva primjera [1, str. 47], u kojima je do evidentne razlike došlo zbog zaokruživanja što on nije uočio.

4. Konačno, rad pomoću kalkulatora u pravilu je mnogo *brži* od rada pomoću tablica; iako bi se u nekim posebnim slučajevima r iz (34) moglo brže odrediti iz tablica.

Držim da su razloženi argumenti dovoljno jaki da potaknu potpuno »istjerivanje« financijskih tablica i ustupanje mjesta elektroničkim kalkulatorima.

Iako mnogi udžbenici matematike za ekonomiste sadrže poglavlje o elektroničkim računalima, nijedan ne ukazuje na njihovu primjenu u financijskoj matematici. Tome može biti razlog da u vrijeme kad su pisani, džepni elektronički kalkulatori još nisu bili dovoljno rasprostranjeni, npr. [9] i [3]; što se ne bi moglo reći za [2] koji je izdan 1980. godine. Izuzetno, u [5] Martić koristi kompjutorske programe za izradu plana amortizacije zajma. Izgleda da će se »zamjena« financijskih tablica kalkulatorom na ekonomskim učilištima suočiti sa izvjesnom inercijom, sličnoj onoj s kojom se nekad suočila »zamjena« logaritamskog računala kalkulatorom na tehničkim učilištima, s tim da će sadašnju biti teže otkloniti.

Čini se da bi upotreba kalkulatora mogla dati i određeni *didaktičko-metodički doprinos*. U postojećoj udžbeničkoj literaturi rascjepkanost i uska obuhvatnost problema financijske matematike nadaje se već na prvi pogled. Širi dijapazon mogućnosti koje kalkulator pruža trebalo bi iskoristiti za *objedinjavanje* šireg dijapazona problema financijske matematike u jedinstvenu metodologiju *financijskog modeliranja. Student financijske matematike morao bi ovladati ovom metodologijom kako bi bio u stanju samostalno kreirati modele primjerene financijskoj praksi.*

Primljeno: 1. 09. 1984.
Prihvaćeno: 14. 12. 1984.

7. REFERENCE

1. F. Ayres, jr., *Schaum's outline of Theory and Problems of Mathematics of Finance*, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, New York 1963.
2. B. Trklja, *Finansijska matematika*, Savremena administracija, Beograd 1980.
3. M. Car, *Matematika za ekonomiste*, Narodne novine, Zagreb 1973.
4. W. T. Dowsett, *Elementary mathematics in economics*, Pitman, London 1963.
5. Lj. Martić, *Kvantitativne metode za financijske i računovodstvene analize*, Informator, Zagreb 1980.
6. V. Vranić i Lj. Martić, *Matematika za ekonomiste II*, 4. prer. izd., Školska knjiga, Zagreb 1967.
7. S. Kurepa, *Matematička analiza: Drugi dio — Funkcije jedne varijable*, Tehnička knjiga, Zagreb 1971.
8. H. Bader i S. Fröhlich, *Matematika za ekonomiste*, Rad, Beograd 1980.
9. A. Dabčević, S. Filipović, B. Sekulić, *Osnove matematike za ekonomiste*, Informator, Zagreb 1971.
10. S. Elarar, *Nomografija*, Tehnička knjiga, Zagreb 1965.
11. M. Radić, *Rješivost algebarskih jednadžbi*, Materija i broj 14, Školska knjiga, Zagreb 1966.
12. *Texas instruments programmable slide-rule calculator SR-56: Applications library.*

MODERN APPROACH TO THE MATHEMATICS OF FINANCE

Virgilio MUŠKARDIN

Summary

Basic characteristics of this approach are:

1. Bringing the problems of the mathematics of finance under a unique methodology of financial modelling: from fundamental postulates of economic theory expressed by differential and difference equations via supplementary conditions to models adequate to financial practice;

2. Use of an electronic calculator as a modern tool for evaluating functions and solving equations of mathematics of finance: advantages of a calculator are contrasted with shortcomings of financial tables, pleading for definite abandon of the tables as an anachronism;

3. Emphasizing graphic representations of models using nomography, also obtaining in this way a possibility of quick estimation.